

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 marzo 1911.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini.* Nota I del Socio T. LEVI-CIVITA.

Il prof. Dini ha stabilito una notevole relazione funzionale fra i valori che una funzione α , armonica e regolare entro un cerchio, assume sul contorno e quelli che vi assume la sua derivata normale.

Immaginando di passare, per trasformazione conforme, dal cerchio ad un generico campo S , la α (espressa nelle nuove variabili) si conserva armonica e regolare entro S , e la formula del Dini (per materiale sostituzione) diviene una relazione funzionale, fra α e la sua nuova derivata normale, valida sul contorno trasformato.

Se il modulo della trasformazione conforme rimane finito e diverso da zero, non solo entro il cerchio, ma anche sulla circonferenza limite, si può senz'altro asserire che la nuova relazione funzionale sussiste sotto le stesse ipotesi qualitative, che furono ben precisate dal Dini. Ma se — come per esempio accade quando il campo S si estende all'infinito — le formule di trasformazione sono affette da qualche singolarità sulla circonferenza limite, possono introdursi (circa il comportamento della funzione sul contorno trasformato) restrizioni affatto artificiali e tali da infirmare l'applicabilità del risultato a casi che (rispetto al contorno trasformato) sono da riguardarsi come normali.

Si richiede allora un po' di discussione per assicurare (a posteriori) alla relazione funzionale trasformata i suoi limiti, dirò così, naturali di validità.

Un esempio elementare, particolarmente interessante, si ha nel passaggio dal cerchio ad una striscia (porzione di piano compresa fra due rette parallele). La relazione funzionale corrispondente (o, più esattamente, certo suo corollario) consente di attribuire tutto il desiderabile rigore ad un brillante artificio analitico escogitato da Lord Rayleigh per cogliere i caratteri salienti dell'onda solitaria. Più generalmente essa consente di lumeggiare l'intera teoria delle onde di canale.

In vista di ciò, chiedo all'Accademia il permesso di intrattenermi alquanto diffusamente sopra l'anzidetta trasformazione, che pur non presenta alcuna novità concettuale.

La deduzione e discussione delle formule occuperà questa e una successiva Nota. In una terza Nota potrò finalmente passare alle applicazioni.

1. — RICHIAMO DELLA FORMULA DEL DINI.

Sia α una funzione armonica, regolare in un certo campo, finita e continua sul contorno di tale campo assieme alla sua derivata normale $\frac{d\alpha}{dn}$ (n designando la normale al contorno, vólta verso l'interno del campo).

La conoscenza dei valori di $\frac{d\alpha}{dn}$ sul contorno determina notoriamente α , a meno di una costante additiva. L'espressione esplicita, nel caso di un campo circolare, fu assegnata dal prof. Dini già parecchi anni or sono ⁽¹⁾, e può scriversi come segue:

$$(1) \quad \alpha_P = -\frac{1}{2\pi} \int_c \log \frac{R^2}{P_1 P P_1 P'} \left(\frac{d\alpha}{dn} \right)_1 dc + \text{cost},$$

dove c rappresenta la circonferenza che limita il campo; R il suo raggio; al log va attribuita la determinazione reale; α_P sta a rappresentare il valore della α nel punto generico P (interno, o anche appartenente alla circonferenza c); P' è il coniugato armonico di P , rispetto a c ; P_1 è un punto di c , rispetto al quale va eseguita l'integrazione, e si contrassegnano col l'indice 1 le determinazioni, che si riferiscono a P_1 , della funzione $\frac{d\alpha}{dn}$ e dell'elemento d'arco dc .

Assumiamo, per semplicità, eguale ad 1 il raggio di c , e introduciamo un sistema cartesiano ξ, η coll'origine nel centro, nonchè le corrispondenti coordinate polari ϱ, σ .

Considerando, accanto alla funzione armonica $\alpha(\xi, \eta)$ (dei punti del nostro campo circolare), la sua associata $\beta(\xi, \eta)$, definita (anch'essa a meno

⁽¹⁾ *Sull'equazione $\Delta^2 u = 0$* , Annali di Matematica, ser. II, tomo V, 1871, pp. 305-345.

di una costante additiva) da

$$(2) \quad d\beta = -\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} d\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} d\eta,$$

risulterà

$$(3) \quad \gamma = \alpha + i\beta$$

funzione della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, regolare per $|\zeta| < 1$, finita e continua assieme alla sua prima derivata sulla circonferenza c ($|\zeta| = 1$).

Se si tien conto che un elemento di c (nel senso delle σ crescenti) e un elemento dn di normale (o, ciò che è lo stesso, di raggio) vólto verso il centro costituiscono una coppia congruente a quella degli assi coordinati ξ, η , le relazioni di monogeneità [compendiate nella (3)] danno, in un punto generico di c :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\beta}{d\sigma} = -\frac{d\alpha}{dn}, \\ \frac{d\beta}{dn} = \frac{d\alpha}{d\sigma}. \end{cases}$$

Ciò posto, concentriamo l'attenzione sui valori di α, β al contorno, pensandoli come funzioni di quell'unica variabile — l'anomalia — che fissa la posizione sul contorno stesso.

Riprendiamo la (1), supponendovi P sul contorno, con che P' viene a coincidere con P . Attribuendo la designazione generica σ all'anomalia di P e rappresentando con σ_1 quella di P_1 , si ha, per ovvie considerazioni di geometria elementare (dacchè $R = 1$):

$$\overline{P_1 P} \cdot \overline{P_1 P'} = \overline{P_1 P}^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}.$$

La prima delle (4) dà

$$\left(\frac{d\alpha}{dn}\right)_1 = -\frac{d\beta(\sigma_1)}{d\sigma_1} = -\beta'(\sigma_1),$$

l'apice designando derivazione rispetto all'argomento indicato.

Si può quindi scrivere

$$(5) \quad \alpha(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \beta'(\sigma_1) d\sigma_1 + \text{cost.}$$

La (1) vale naturalmente anche per la funzione associata β . Avuto riguardo alla seconda delle (4), se ne trae

$$(6) \quad \beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \alpha'(\sigma_1) d\sigma_1 + \text{cost.}$$

2. — COROLLARI.

Supponiamo in particolare che si tratti di una funzione $\gamma(\zeta)$, reale per ζ reale. La parte reale α assume allora valori eguali in punti simmetrici rispetto all'asse reale $\eta = 0$; la β assume invece valori opposti. Ciò si traduce, per i punti di c , nelle formule seguenti:

$$\begin{cases} \alpha(2\pi - \sigma) = \alpha(\sigma), \\ \beta(2\pi - \sigma) = -\beta(\sigma), \end{cases}$$

donde, per derivazione,

$$\begin{cases} \alpha'(2\pi - \sigma) = -\alpha'(\sigma), \\ \beta'(2\pi - \sigma) = \beta'(\sigma). \end{cases}$$

In virtù dell'ultima di queste relazioni, ove si scinda nella (5) l'intervallo di integrazione in due parti (da 0 a π , e da π a 2π), si cambi, nel secondo integrale, la variabile corrente di integrazione σ_1 in $2\pi - \sigma_1$, e si ponga

$$(7) \quad H(\sigma_1, \sigma) = \log \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}},$$

si può attribuire alla (5) la forma

$$(8) \quad \alpha(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi H(\sigma_1, \sigma) \beta'(\sigma_1) d\sigma_1 + \text{cost.}$$

Dacchè si ha identicamente

$$H(\sigma_1, 2\pi - \sigma) = H(\sigma_1, \sigma),$$

rimane inclusa, nella espressione (8) di α , la condizione di simmetria al contorno $\alpha(2\pi - \sigma) = \alpha(\sigma)$.

In modo analogo, si ha dalla (6), ove si tenga conto di $\alpha'(2\pi - \sigma) = -\alpha'(\sigma)$ e si ponga

$$(9) \quad K(\sigma_1, \sigma) = \log \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}},$$

$$\beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K(\sigma_1, \sigma) \alpha'(\sigma_1) d\sigma_1 + \text{cost.}$$

Essendo identicamente

$$K(\sigma_1, 2\pi - \sigma) = -K(\sigma_1, \sigma),$$

la proprietà emisimmetrica di β [$\beta(2\pi - \sigma) = -\beta(\sigma)$] esige che la costante

additiva sia nulla. Era ben prevedibile che la indeterminazione dovesse scomparire [a differenza di quel che accade nella (8)], considerando che l'assunta ipotesi (γ reale, e quindi $\beta = 0$ sull'asse reale) può lasciar sussistere la indeterminazione di una costante additiva in α , ma non in β .

Risulta pertanto

$$(10) \quad \beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K(\sigma_1, \sigma) \alpha(\sigma_1) d\sigma_1.$$

3. — PASSAGGIO ALLA STRISCIA.

Ove si ponga

$$(11) \quad f = \varphi + i\psi = \frac{2}{\pi} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \quad (\varphi \text{ e } \psi \text{ reali}),$$

e si fissi quella determinazione del logaritmo che si annulla con ζ , rimane definita una funzione $f(\zeta)$ della variabile complessa ζ uniforme e regolare entro il cerchio $|\zeta| < 1$, e reale sul diametro reale.

Per riconoscere comodamente la regione del piano complesso f , che viene a corrispondere, per la (11), al campo circolare $|\zeta| \leq 1$, introduciamo per un momento anche i due raggi vettori, che congiungono un punto generico ζ (del cerchio o della circonferenza) colle estremità $\zeta = -1, \zeta = 1$ del diametro reale. Diciamo ordinatamente ϱ_{-1}, ϱ le lunghezze di questi raggi vettori e $\vartheta_{-1}, \vartheta_1$ gli angoli acuti che essi formano coll'asse reale, contati positivamente pel semicerchio di ordinate positive, negativamente per l'altro.

$\varrho_{-1}, \vartheta_{-1}$ possono evidentemente interpretarsi quali coordinate polari (del punto ζ) rispetto al polo $\zeta = -1$ e alla direzione positiva (quella delle ascisse crescenti) del diametro reale come asse polare. Del pari ϱ_1, ϑ_1 , rispetto al polo $\zeta = 1$ e alla direzione negativa del diametro suddetto: volendo cambiare direzione all'asse, in modo che l'anomalia riesca contata sempre nello stesso verso, le coordinate polari saranno $\varrho_1, \pi - \vartheta_1$.

Ora, $\zeta + 1$ e $\zeta - 1$ essendo le affisse di un punto generico ζ relative alle origini $-1, 1$ (e ad assi paralleli ai primitivi ξ, η), sussistono le identità

$$\begin{aligned} \zeta + 1 &= \varrho_{-1} e^{i\vartheta_{-1}} \\ \zeta - 1 &= \varrho_1 e^{i(\pi - \vartheta_1)}, \end{aligned}$$

la seconda delle quali può essere scritta

$$1 - \zeta = \varrho_1 e^{-i\vartheta_1}.$$

Prendendo i logaritmi dei due membri colla determinazione che si annulla

nell'origine (e che rimane univocamente fissata per continuità entro o anche sopra la circonferenza $|\zeta|=1$, fatta solo eccezione per i punti ± 1), si ha

$$\begin{aligned}\log(1+\zeta) &= \log \varrho_{-1} + i\vartheta_{-1}, \\ \log(1-\zeta) &= \log \varrho_1 - i\vartheta_1,\end{aligned}$$

dove a $\log \varrho_{-1}$, $\log \varrho_1$ vanno naturalmente attribuiti i loro valori reali.

Ne consegue

$$(12) \quad f = \varphi + i\psi = \frac{2}{\pi} \log \frac{\varrho_{-1}}{\varrho_1} + i \frac{2}{\pi} (\vartheta_{-1} + \vartheta_1).$$

Atteso il significato geometrico di ϑ_{-1} , ϑ_1 , questa formula mostra nettamente che, al variare di ζ nel semicerchio di ordinate positive, ψ rimane compreso fra 0 e 1, assumendo il valore zero sul diametro e il valore 1 sulla semicirconferenza $1, i, -1$. Variando invece ζ nel sottostante semicerchio, ψ varia fra 0 e -1 , assumendo (come poteva asserirsi *a priori*, data la realtà di f sull'asse reale) valori opposti in punti simmetrici.

Le varie circonferenze passanti per i punti $-1, 1$, o meglio gli archi di tali circonferenze interni a c (inclusovi il segmento rettilineo $-1, 1$, che ne è caso limite) sono luoghi di punti, per cui

$$\psi = \frac{2}{\pi} (\vartheta_{-1} + \vartheta_1)$$

conserva valore costante. Mentre ζ percorre uno di questi archi, passando da -1 a 1 , ϱ_{-1} cresce costantemente, a partire dal valore zero, e ϱ_1 decresce costantemente, convergendo verso zero.

Il rapporto $\frac{\varrho_{-1}}{\varrho_1}$ varia dunque, sempre crescendo, da 0 a ∞ , sicchè

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{\varrho_{-1}}{\varrho_1}$$

varia, crescendo sempre anch'esso, da $-\infty$ a $+\infty$. Ciò val quanto dire che l'affissa f descrive (nel suo piano rappresentativo) una parallela all'asse delle ascisse, percorrendola tutta, in senso positivo.

Se ne conclude che la (11) fa corrispondere al campo circolare $|\zeta| \leq 1$ del piano ζ la striscia S del piano f compresa fra le due rette $\psi = \pm 1$, la corrispondenza risultando biunivoca anche fra i contorni.

Val la pena di rilevare che a valori puramente immaginari di ζ corrispondono analoghi valori di f . Ciò risulta per es. dall'osservare che, per ζ puramente immaginario, $1+\zeta$ e $1-\zeta$ riescono coniugati, sicchè il modulo del rapporto è 1, e la (11) dà $\varphi = 0$. Si può egualmente desumerlo dalla (12), notando che, sul diametro immaginario $-i, i$, si ha $\varrho_{-1} = \varrho_1$.

Consideriamo in particolare i punti ζ della semicirconferenza $-1, i, 1$, e riprendiamo la coordinata polare σ relativa al centro, facendola variare (in senso sempre decrescente) da π a 0. Il punto $\zeta = e^{i\sigma}$ descrive così la detta semicirconferenza da -1 a 1 , e il corrispondente punto f la retta $\psi = 1$ da $-\infty$ a $+\infty$.

Essendo poi

$$\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{1+e^{i\sigma}}{1-e^{i\sigma}} = \frac{e^{-\frac{i\sigma}{2}} + e^{\frac{i\sigma}{2}}}{e^{-\frac{i\sigma}{2}} - e^{\frac{i\sigma}{2}}} = i \cot \frac{\sigma}{2},$$

la (11) ci dà

$$(13) \quad \varphi = \frac{2}{\pi} \log \cot \frac{\sigma}{2}$$

(si intende colla determinazione reale del logaritmo), e di conseguenza

$$(13') \quad \cot \frac{\sigma}{2} = e^{\frac{\pi}{2}\varphi},$$

le quali esplicitano la relazione biunivoca fra σ e φ , cioè fra i parametri definienti la posizione sul semicerchio $-1, i, 1$ e sulla retta $\psi = 1$ rispettivamente.

4. — TRASFORMAZIONE SUBORDINATA NELLE PRECEDENTI EQUAZIONI FUNZIONALI.

Mercè la (11), ogni funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa f , uniforme e regolare entro S , si può pure considerare come funzione uniforme e regolare di ζ per i valori corrispondenti, cioè entro il cerchio $|\zeta| \leq 1$.

Se $\gamma(f)$ è reale sull'asse reale $\psi = 0$ (bisettrice della striscia), lo sarà di conseguenza $\gamma(\zeta)$ sul diametro reale $-1, 1$ del cerchio.

Un po' di discussione esige però il comportamento al contorno.

Se (come è tassativo fare per certe applicazioni), circa il comportamento all'infinito di $\gamma(f)$ e di $\frac{d\gamma}{df}$, si ammette soltanto che si conservino entrambe finite sulle rette limiti $\psi = \pm 1$ di S , non ne segue che $\gamma(\zeta)$ rimanga continua, e sopra tutto che $\frac{d\gamma}{d\zeta}$ rimanga finita per i punti ± 1 della circonferenza c .

Infatti, per quanto abbiamo visto nel n.º precedente, ove si fissi per esempio la retta $\psi = 1$ e la corrispondente semicirconferenza $-1, i, 1$, riportandovi i valori di $\gamma(\varphi + i)$, bisogna badare alla circostanza che gli estremi ± 1 della semicirconferenza corrispondono a $\varphi = \pm \infty$.

Se la $\gamma(\varphi + i)$, pur restando finita, non converge verso limiti determinati al crescere indefinito di φ , lo stesso avviene per $\gamma(\zeta)$ al tendere di ζ (sopra la semicirconferenza) verso uno dei due estremi: si ha dunque in generale una discontinuità di seconda specie.

E le cose vanno ancora peggio per $\frac{d\gamma}{d\zeta}$. Essendo, in virtù della (11),

$$(14) \quad \frac{d\gamma}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{df} \frac{df}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{df} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - \zeta^2},$$

la $\frac{d\gamma}{d\zeta}$, e con essa α', β' , diverranno in generale infinite nei punti $\zeta = \pm 1$.

Perciò una $\gamma(\zeta)$, proveniente nel modo testè indicato, da una $\gamma(f)$ regolare nella striscia, reale sull'asse reale, continua, assieme a $\frac{d\gamma}{df}$, anche sulle rette limiti, ma semplicemente finita all'infinito, non ottempera senz'altro alle condizioni qualitative (del Dini), sotto cui furono dedotte le relazioni funzionali del n.º 2.

Introduciamo, in via provvisoria, le ipotesi complementari seguenti:

1º la funzione $\gamma(\varphi + i)$ converge verso valori limiti reali ben determinati per $\varphi = \pm \infty$ (con che $\lim \beta = 0$);

2º $\frac{d\gamma(\varphi + i)}{d\varphi}$ converge verso zero in tal guisa che $\frac{d\gamma}{d\zeta}$ resti finita e continua anche per $\zeta = \pm 1$, o, ciò che è lo stesso, resti finita e continua $\frac{d\gamma}{d\sigma}$ per $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$. Essendo, per la (13),

$$d\varphi = -\frac{2}{\pi} \frac{d\sigma}{\sin \sigma} = -\frac{1}{\pi} \left(e^{\frac{\pi}{2}\varphi} + e^{-\frac{\pi}{2}\varphi} \right) d\sigma,$$

quest'ultima condizione esige che $\frac{d\gamma}{d\varphi}$ si annulli esponenzialmente all'infinito, per modo che il prodotto $\left(e^{\frac{\pi}{2}\varphi} + e^{-\frac{\pi}{2}\varphi} \right) \frac{d\gamma(\varphi + i)}{d\varphi}$ converga verso limiti determinati e finiti per $\varphi = \pm \infty$.

Con ciò i valori di α, β verificano, sulla circonferenza c , le condizioni di Dini, e sono di conseguenza legati dalle (8) e (10). Trasformiamole, sostituendovi alle anomalie σ e σ_1 dei punti del semicerchio $-1, i, 1$ le corrispondenti ascisse φ e φ_1 dei punti della retta $\psi = 1$.

Le formule di passaggio, cioè la (13)

$$\cot \frac{\sigma}{2} = e^{\frac{\pi}{2}\varphi}$$

e l'analoga

$$\cot \frac{\sigma_1}{2} = e^{\frac{\pi}{2} \varphi_1}$$

conferiscono ai nuclei $H(\sigma_1, \sigma)$, $K(\sigma_1, \sigma)$, definiti da (7) e (9), le espressioni seguenti

$$\begin{aligned} H(\varphi_1, \varphi) &= \log \left\{ \frac{(1 + e^{\frac{\pi}{2} \varphi_1})(1 + e^{\frac{\pi}{2} \varphi})}{\frac{1}{4}(e^{\frac{\pi}{2} \varphi_1} - e^{\frac{\pi}{2} \varphi})} \right\}^2 = \\ &= \log \left\{ \frac{\left(e^{\frac{\pi}{2} \varphi_1} + e^{-\frac{\pi}{2} \varphi_1}\right) \left(e^{\frac{\pi}{2} \varphi} + e^{-\frac{\pi}{2} \varphi}\right)}{\frac{1}{4} \left\{ e^{\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi)} - e^{-\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi)} \right\}} \right\}^2, \\ (9') \quad K(\varphi_1, \varphi) &= \log \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2} \varphi_1} + e^{\frac{\pi}{2} \varphi}}{e^{\frac{\pi}{2} \varphi_1} - e^{\frac{\pi}{2} \varphi}} \right)^2. \end{aligned}$$

In $H(\varphi_1, \varphi)$ conviene staccare l'addendo $\log \frac{1}{16} \left(e^{\frac{\pi}{2} \varphi} + e^{-\frac{\pi}{2} \varphi} \right)^2$, che non dipende da φ_1 , e scrivere in conformità

$$(7') \quad H(\varphi_1, \varphi) = A(\varphi_1, \varphi) + \log \frac{1}{16} \left(e^{\frac{\pi}{2} \varphi} + e^{-\frac{\pi}{2} \varphi} \right)^2$$

con

$$(15) \quad A(\varphi_1, \varphi) = \log \left\{ \frac{e^{\frac{\pi}{2} \varphi_1} + e^{-\frac{\pi}{2} \varphi_1}}{e^{\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi)} - e^{-\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi)}} \right\}^2.$$

Se si nota che

$$\alpha'(\sigma_1) d\sigma_1 = d\alpha = \alpha'(\varphi_1) d\varphi_1,$$

e che, come abbiamo rilevato alla fine del n.º 3, al verso $-1, i, 1$ del semicerchio, cioè al verso decrescente di σ da π a zero, fa riscontro il verso crescente $-\infty, +\infty$ di φ , la (10) assume l'aspetto

$$(I) \quad \beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) \alpha'(\varphi_1) d\varphi_1.$$

In modo analogo la (8) diviene

$$(8') \quad \alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\varphi_1, \varphi) \beta'(\varphi_1) + \text{cost.}$$

Per la prima delle ipotesi complementari, poc' anzi enunciate, la funzione $\beta(\varphi)$ deve tendere verso zero per $\varphi = \pm \infty$; ciò implica, esistendo ed essendo anzi continua la derivata,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi_1) d\varphi_1 = 0.$$

Ne segue, avuto riguardo alla espressione (7') di H , che si può, nella (8'), ridurre H al primo addendo \mathcal{A} , e ritenere accanto alla (I), l'equazione

$$(II) \quad \alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\varphi_1, \varphi) \beta'(\varphi_1) d\varphi_1 + \text{cost.}$$

La (I), immaginandovi per un momento sostituita ad α' la derivata normale di β , concerne, si può dire, le funzioni armoniche β *dispari* rispetto all'asse reale (tali cioè che assumono valori opposti in punti simmetrici rispetto a tale asse); la (II) (immaginandovi introdotta per β' la derivata normale di α) concerne invece le funzioni *pari* (simmetriche rispetto allo stesso asse). Appare così giustificato, e potrà talora essere comodo, di designare la (I) e la (II) colle qualifiche rispettive di *relazione dispari* e *relazione pari*.

5. — COMPORTAMENTO DEI NUCLEI $K(\varphi_1, \varphi)$, $\mathcal{A}(\varphi_1, \varphi)$.

Occupiamoci dapprima di K .

Designando per brevità con s la differenza $\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi)$, la (9') ci dà

$$(16) \quad K(\varphi_1, \varphi) = \log \left(\frac{1 + e^{-s}}{1 - e^{-s}} \right)^2 = \log \left(\frac{1 + e^s}{1 - e^s} \right)^2,$$

donde apparisce che K dipende soltanto dall'argomento s e ne è funzione pari. Esso ha manifestamente un infinito logaritmico per $s = 0$ ($\varphi_1 = \varphi$), mentre si mantiene regolare per ogni altro valore reale di s ; è ovunque positivo, e decresce al decrescere di s in valore assoluto, annullandosi esponenzialmente per $s = \pm \infty$. Ciò risulta dall'osservare che, per $|s| > 0$, si ha dalla nota serie logaritmica

$$(17) \quad \log \left(\frac{1 + e^{-|s|}}{1 - e^{-|s|}} \right)^2 = 2 \{ \log(1 + e^{-|s|}) - \log(1 - e^{-|s|}) \} = \\ = 4 \left\{ e^{-|s|} + \frac{e^{-3|s|}}{3} + \frac{e^{-5|s|}}{5} + \dots \right\}.$$

Come si vede, i singoli termini sono positivi e sempre decrescenti al crescere di $|s|$; la funzione tende poi asintoticamente ad annullarsi come $e^{-|s|}$.

Essa rimane quindi integrabile fra $-\infty$ e $+\infty$, anche moltiplicata per una potenza qualunque di s .

Lo stesso può dirsi, riponendo per s il suo valore $\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi)$, nei riguardi della variabile φ_1 .

Ne consegue in particolare che, se $A(\varphi_1)$ designa una qualsiasi funzione di φ_1 , finita e continua al finito, e finita (o anche dotata di singolarità polare comunque elevata) per $\varphi_1 = \pm \infty$, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) A(\varphi_1) d\varphi_1$$

rappresenta una funzione di φ , finita e continua anche all' ∞ .

Prendiamo in particolare $A(\varphi_1) = 1$. Avremo anzi tutto, adottando $s = \frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi)$ come variabile di integrazione al posto di φ_1 , e tenendo presente la parità della K , considerata come funzione di s ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) d\varphi_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \log \left(\frac{1 + e^{-s}}{1 - e^{-s}} \right)^2 ds.$$

Al $\log \left(\frac{1 + e^{-s}}{1 - e^{-s}} \right)^2$ si può applicare lo sviluppo (17) e integrare termine a termine da un ε positivo, comunque piccolo, a ∞ ; dopo di che, attesa l'integrabilità della funzione e l'uniforme convergenza della serie degli integrali anche per $\varepsilon = 0$, si ha al limite

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) d\varphi_1 = \frac{8}{\pi^2} \left\{ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right\} = \frac{8}{\pi^2} s'_2,$$

designando s'_2 la somma delle inverse dei quadrati dei numeri dispari. Ora la somma s_2 delle inverse dei quadrati di tutti i numeri naturali vale $\frac{\pi^2}{6}$ ⁽¹⁾.

D'altra parte s_2 consta di s'_2 e dell'analogha somma relativa ai numeri pari, che vale $\frac{1}{4} s_2$. Se ne ricava

$$s'_2 = \frac{3}{4} s_2 = \frac{\pi^2}{8},$$

e di conseguenza

$$(18) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) d\varphi_1 = 1,$$

per qualsiasi valore (reale) di φ .

(1) Cfr. per es. Cesàro, *Corso di analisi algebrica*. Torino, Bocca, 1894, pag. 481.

Val la pena di rilevare che quest'ultima formula può essere considerata come quel caso particolare della relazione dispari (I), che si riferisce alla funzione $\gamma(f) = f = \varphi + i\psi$: si ha infatti, per tale funzione, $\alpha' = \beta = 1$ sulla retta $\psi = 1$. Si noti tuttavia che $\gamma(f) = f$ non è una di quelle funzioni, per cui la formula (I) può ritenersi senz'altro trasportabile dal cerchio, in base a quanto precede. In realtà lo è, come vedremo più innanzi. Intanto ho voluto, a titolo d'esempio, fare il calcolo diretto dell'integrale.

Passiamo alla funzione $\mathcal{A}(\varphi_1, \varphi)$, e consideriamone il modo di variare con φ_1 in corrispondenza ad un valore (finito) generico di φ . Dalla (15) apparisce che \mathcal{A} ha una singolarità logaritmica per $\varphi_1 = \varphi$, si mantiene regolare per ogni altro valore reale di φ_1 , convergendo, per $\varphi_1 = \pm \infty$, verso i limiti $\pm \pi \varphi$ rispettivamente. Questo infirma la integrabilità della \mathcal{A} (rispetto a φ_1) da $-\infty$ a $+\infty$.

Mostrerò in una prossima Nota come si possa allargare il campo di validità delle equazioni integrali (I), (II).

Matematica. — *Contributo allo studio delle funzioni permutabili.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

§ 1. — OSSERVAZIONI SULLA COMPOSIZIONE.

1. La operazione di *composizione* (composizione di prima specie) delle due funzioni finite e continue f e φ ,

$$\int_x^y f(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi$$

si può evidentemente considerare indipendentemente dalla permutabilità delle due funzioni ⁽¹⁾. Rappresentandone il risultato col simbolo $f\varphi(x, y)$ o più semplicemente col simbolo $f\varphi$, avremo che se f e φ non saranno permutabili $f\varphi$ sarà diverso da φf .

La operazione stessa gode in generale della proprietà associativa. Infatti

$$\int_x^y f(x, \xi) d\xi \int_\xi^y \varphi(\xi, \eta) \psi(\eta, y) d\eta = \int_x^y \psi(\eta, y) d\eta \int_x^\eta f(x, \xi) \varphi(\xi, \eta) d\xi.$$

Potremo dunque enunciare il teorema: *Siano o no permutabili le funzioni f, φ, ψ , avremo sempre*

$$(f\varphi)\psi = f(\varphi\psi).$$

2. Da questa proposizione discende immediatamente l'altra che enunciammo in una precedente Nota ⁽²⁾, cioè che *tutte le funzioni ottenute per*

⁽¹⁾ Cfr. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* Rend. Acc. dei Lincei, Seduta del 20 febbraio 1910, § 1.

⁽²⁾ Ibid.

composizione da più funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni date.

Infatti, se f, φ, ψ sono permutabili, avremo

$$(f\varphi)\psi = f(\varphi\psi) = f(\psi\varphi) = (f\psi)\varphi = (\psi f)\varphi = \psi(f\varphi).$$

§ 2. — RISOLUZIONE DI EQUAZIONI INTEGRALI.

1. Se f e φ sono funzioni derivabili, ed inoltre sono rispettivamente funzioni di ordini m ed n ⁽¹⁾ con $m > n$, l'equazione integrale di prima specie

$$(1) \quad f(x, y) = \int_x^y \psi(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi$$

ammette un'unica soluzione che è la soluzione dell'equazione integrale di seconda specie

$$(2) \quad f_n(x, y) = \psi(x, y) \varphi_{n-1}(y, y) + \int_x^y \psi(x, \xi) \varphi_n(\xi, y) d\xi,$$

ove si è scritto in generale

$$f_p(x, y) = \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial y^p}, \quad \varphi_p(x, y) = \frac{\partial^p \varphi(x, y)}{\partial y^p}.$$

Ciò si riconosce immediatamente derivando n volte l'equazione (1) e tenendo conto che

$$\begin{aligned} \varphi_p(y, y) &= 0, & \text{se } p < n-1, & \quad \varphi_{n-1}(y, y) \geq 0 \\ f_p(x, x) &= 0, & \text{se } p \leq n-1 \end{aligned}$$

ed osservando inoltre che, ogni funzione che soddisfa la (1) deve verificare la (2) e reciprocamente.

2. Dimostriamo ora che se f e φ sono permutabili, ψ è permutabile con ambedue queste funzioni.

Infatti la (1) si potrà scrivere

$$f = \psi\varphi$$

quindi

$$\begin{aligned} (3) \quad \varphi f &= \varphi(\psi\varphi) = (\varphi\psi)\varphi \\ (4) \quad f\varphi &= (\psi\varphi)\varphi \end{aligned}$$

Ma per ipotesi $\varphi f = f\varphi$, onde, se risolviamo la equazione (3) considerando $\varphi\psi$ come incognita, troveremo, in virtù di quanto è detto precedentemente, la stessa soluzione che risolvendo la (4) in cui si consideri $\psi\varphi$ come inco-

⁽¹⁾ Nella presente Nota supporremo sempre, senza ripeterlo esplicitamente ogni volta, che le funzioni che si considerano siano finite e continue e così le derivate loro di cui si deve tener conto. Per la definizione di *ordine* di una funzione, vedi: *Sulle funzioni permutabili*. Rend. Acc. dei Lincei, Seduta del 17 aprile 1910, § 3.

gnita. Ne segue che

$$\varphi\psi = \psi\varphi$$

onde φ e ψ sono permutabili ed in conseguenza sono pure permutabili f e ψ .

3. È facile riconoscere che, risolvendo la (1), la soluzione ψ sarà di ordine $m - n$. Quindi, se i numeri m ed n saranno primi fra loro, colla risoluzione di successive equazioni integrali potremo sempre trovare funzioni di primo ordine permutabili con f e con φ .

4. In modo perfettamente analogo a quanto si è fatto precedentemente si dimostra che, se f e φ sono funzioni permutabili di ordini rispettivamente m ed n con $m > np$, e se

$$f = \psi\varphi^p,$$

ψ è permutabile con f e φ .

§ 3. — RICERCA DI TUTTE LE FUNZIONI PERMUTABILI CON UNA FUNZIONE DI 2° ORDINE.

1. Supponendo $f(x, y)$ di 2° ordine e nota per tutti i valori di x, y , tali che

$$a \leq x \leq y \leq b,$$

proponiamoci di trovare tutte le funzioni $\varphi(x, y)$ con essa permutabili.

Con un procedimento analogo a quello che abbiamo tenuto in una Nota precedente ⁽¹⁾ potremo ricondurre il problema al caso in cui si abbia

$$\begin{aligned} f(x, x) &= 0 & f_1(x, x) &= -1 & f_2(x, x) &= 1 \\ f_{11}(x, x) &= 0 & f_{12}(x, x) &= 0 & f_{22}(x, x) &= 0, \end{aligned}$$

avendo posto

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & f_2(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ f_{11}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & f_{12}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & f_{22}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

2. Scriviamo

$$(5) \quad \Phi(x, y) = \int_x^y f(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y) d\xi.$$

Avremo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \varphi(x, y) + \int_x^y f_{11}(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \varphi(x, y) + \int_x^y \varphi(x, \xi) f_{22}(\xi, y) d\xi \end{aligned} \right.$$

(1) *Sopra le funzioni permutabili.* Rend. Acc. dei Lincei, Seduta 17 aprile 1910, § 1.

e ponendo

$$\begin{aligned} f_{11}(x, y) - f_{11}^2(x, y) + f_{11}^3(x, y) - \dots &= F_{11}(x, y), \\ f_{22}(x, y) - f_{22}^2(x, y) + f_{22}^3(x, y) - \dots &= F_{22}(x, y), \end{aligned}$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione, sarà

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \int_x^y F_{11}(x, \xi) \frac{\partial^2 \Phi(\xi, y)}{\partial \xi^2} d\xi \\ \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int_x^y F_{22}(\xi, y) \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^2} d\xi. \end{cases}$$

Ora

$$F_{11}(x, x) = 0, \quad F_{22}(x, x) = 0,$$

quindi, posto

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{11}(x, y)}{\partial y} = \lambda_{11}(x, y) \\ \frac{\partial^2 F_{11}(x, y)}{\partial y^2} = \mu_{11}(x, y) \\ \frac{\partial F_{22}(x, y)}{\partial x} = \lambda_{22}(x, y) \\ \frac{\partial^2 F_{22}(x, y)}{\partial x^2} = \mu_{22}(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{11}(x, x) = \lambda_1(x) \\ \mu_{11}(x, x) = \mu_1(x) \\ \lambda_{22}(x, x) = \lambda_2(x) \\ \mu_{22}(x, x) = \mu_2(x) \end{cases}$$

e, osservando che $\Phi(x, y)$ è di ordine superiore al secondo e perciò

$$\left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right)_{x=y} = 0,$$

le (6) si trasformeranno facilmente, mediante integrazioni per parti, nelle equazioni seguenti

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \lambda_1(x) \Phi(x, y) - \int_x^y \mu_{11}(x, \xi) \Phi(\xi, y) d\xi \\ \varphi(x, y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \lambda_2(y) \Phi(x, y) - \int_0^y \mu_{22}(\xi, y) \Phi(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Sottraendo si avrà

$$(A) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (\lambda_2(y) + \lambda_1(x)) \Phi(x, y) + \\ + \int_x^y [\mu_{11}(x, \xi) \Phi(\xi, y) - \mu_{22}(\xi, y) \Phi(x, \xi)] d\xi = 0.$$

Dunque $\Phi(x, y)$ deve soddisfare l'equazione integro-differenziale (A).

3. Poniamo

$$\begin{aligned} g(x, y) &= -(\lambda_2(y) + \lambda_1(x)) \Phi(x, y) - \\ &- \int_x^y [\mu_{11}(x, \xi) \Phi(\xi, y) - \mu_{22}(\xi, y) \Phi(x, \xi)] d\xi \end{aligned}$$

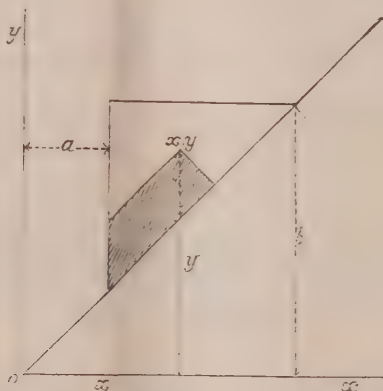
la (A) si scriverà

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = g(x, y),$$

d'onde

$$\Phi(x, y) = \psi(y - x) + \theta(x + y) + \frac{1}{2} \int_{A_{x,y}} g(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

ove ψ e θ denotano due funzioni arbitrarie, e con $\int_{A_{x,y}}$ si intende l'integrale esteso allo spazio $A_{x,y}$ compreso fra la bisettrice degli assi x, y , le due rette inclinate di 45° sugli assi coordinati condotte per il punto x, y e la retta parallela all'asse y che ne dista di a . Lo spazio $A_{x,y}$ è lo spazio tratteggiato indicato nella figura.



Ma, se facciamo $x = y$, abbiamo

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{A_{x,y}} g(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

quindi

$$\psi(0) + \theta(2x) = 0,$$

ossia θ deve essere una costante eguale a $-\psi(0)$.

Se dunque prendiamo ψ in modo che si annulli per $x = y$, avremo

$$(A') \quad \Phi(x, y) = \psi(y - x) + \frac{1}{2} \int_{A_{x,y}} g(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

e per conseguenza si potrà sostituire all'equazione integro-differenziale (A) l'equazione integrale (A').

4. Si riconosce facilmente che, nota $\psi(y - x)$, la funzione Φ è determinata dalla (A'). ossia se $\psi(y - x)$ è nulla, anche Φ è nulla. Ciò si ot-

tiene impiegando metodi analoghi a quelli che abbiamo adoperato in circostanze simili in precedenti Memorie ⁽¹⁾.

La risoluzione della equazione integrale (A') non presenta difficoltà. La funzione $\Phi(x, y)$ è di terzo ordine o di ordine superiore al terzo, quindi dovremo prendere anche $\psi(y - x)$ di terzo ordine o di ordine superiore al terzo. Si dimostra che, assumendo in tal maniera $\psi(y - x)$, la funzione Φ , ottenuta risolvendo l'equazione integrale (A'), soddisfa le (5) ed è dello stesso ordine di $\psi(y - x)$. Risolvendo una delle (5) si otterranno tutte le funzioni permutabili con $f(x, y)$. In particolare prendendo $\psi(y - x)$ del terzo ordine, $f(x, y)$ risulterà del primo ordine.

Il problema di ottenere tutte le funzioni permutabili con una funzione del secondo ordine è quindi risoluto.

5. Se $f(x, y)$ è della forma $f(y - x)$, allora

$$\lambda_{11}(x, y) = -\lambda_{22}(x, y) = \lambda(y - x),$$

per conseguenza

$$\lambda_1(x) = -\lambda_2(y) = \lambda(0).$$

Inoltre

$$\mu_{11}(x, y) = \mu_{22}(x, y) = \mu(y - x).$$

Ne segue che

$$g(x, y) = \int_x^y [\mu(y - \xi) \Phi(x, \xi) - \mu(\xi - x) \Phi(\xi, y)] d\xi,$$

onde l'equazione integrale (A') è soddisfatta prendendo

$$\Phi(x, y) = \psi(y - x).$$

Se ne deduce che tutte le funzioni permutabili con $f(y - x)$, appartengono al gruppo delle funzioni permutabili coll'unità.

§ 4. — RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE

$$(I) \quad \int_x^y \varphi(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi = \psi(x, y)$$

OVE ψ È UNA FUNZIONE DATA DEL 2° ORDINE E φ È INCOGNITA.

1. Poniamo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1)$$

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le precedenti equazioni possano invertirsi univocamente ed avere

$$x_1 = f_1(x) \quad , \quad y_1 = f_1(y) \quad , \quad \xi_1 = f_1(\xi).$$

⁽¹⁾ *Sulle funzioni permutabili.* Rend. Acc. dei Lincei, Seduta 17 aprile 1910, § 2.

Colla precedente sostituzione si otterrà

$$(7) \quad \int_{x_1}^{y_1} \varphi(x_1, \xi_1) \varphi(\xi_1, y_1) f'(\xi_1) d\xi_1 = \psi(x_1, y_1).$$

Sia

$$\begin{aligned} \sqrt{f'(x_1) f'(y_1)} \varphi(x_1, y_1) &= \varphi_1(x_1, y_1) \\ \sqrt{f'(x_1) f'(y_1)} \psi(x_1, y_1) &= \psi_1(x_1, y_1). \end{aligned}$$

La equazione (7) si scriverà

$$\int_{x_1}^{y_1} \varphi_1(x_1, \xi_1) \varphi_1(\xi_1, y_1) d\xi_1 = \psi_1(x_1, y_1).$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{y-x} = \lambda^2(x).$$

Potremo assumere $\lambda(x)$ diverso da zero e positivo. Ma

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{y-x}{y_1-x_1} = f'(x_1) = \frac{1}{f'_1(x)},$$

quindi

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1-x_1} = \left(\frac{\lambda(x)}{f'_1(x)} \right)^2,$$

onde, preso $f'_1(x) = \lambda(x)$, avremo

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1-x_1} = 1.$$

Potremo dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ricondurre la equazione (I) al caso in cui sia

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{y-x} = 1.$$

Noi ammetteremo quindi soddisfatta senz'altro questa condizione.

2. Ciò premesso calcoliamo, col procedimento indicato nel paragrafo precedente, una funzione $\theta(x, y)$ di primo ordine permutabile con $\psi(x, y)$. È facile riconoscere, da quanto si è trovato nel detto paragrafo, che $\theta(x, x)$ dovrà essere una costante diversa da zero. Moltiplicando quindi $\theta(x, y)$ per un fattore costante, potremo ricondurre al caso in cui $\theta(x, x) = 1$.

Supponiamo che $\psi(x, y)$ e $\theta(x, y)$ ammettano le derivate seconde e poniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} &= \theta_2(x, y), \quad \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial y^2} = \theta_{22}(x, y), \quad \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = \psi_{22}(x, y) \\ \left(\frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial y^2} &= \theta_2(x, y) + \theta(x, y) \theta_2(y, y) + \int_x^y \theta(x, \xi) \theta_{22}(\xi, y) d\xi = \lambda(x, y) \right. \\ \left. \frac{\partial^2 (\psi(x, y) - \theta^2(x, y))}{\partial y^2} &= \psi_{22}(x, y) - \lambda(x, y) = \mu(x, y). \right. \end{aligned}$$

Risolviamo ora l'equazione integrale

$$(8) \quad \mu(x, y) = \chi(x, y) + \int_x^y \chi(x, \xi) \lambda(\xi, y) d\xi,$$

considerando $\chi(x, y)$ come funzione incognita, e formiamo la serie (la quale per principii noti ⁽¹⁾ sappiamo esser convergente)

$$(II) \quad \begin{aligned} \varphi(x, y) = & \theta(x, y) + \frac{1}{2} \theta \chi(x, y) + \\ & + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \theta \chi^2(x, y) + \dots + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \theta \chi^n(x, y) + \dots \end{aligned}$$

ove con $\theta \chi^n(x, y)$ si intende il risultato di una operazione di composizione.

Si dimostra facilmente che $\pm \varphi(x, y)$ verifica l'equazione (I).

Infatti, integrando due volte la (8), si ricava che

$$\psi(x, y) = \theta^2(x, y) + \int_x^y \chi(x, \xi) \theta^2(\xi, y) d\xi.$$

χ è per conseguenza permutabile con θ e con ψ (vedi § 2). Ne segue, componendo la serie (II) con se stessa,

$$\varphi^2(x, y) = \theta^2 + \theta^2 \chi = \psi(x, y).$$

§ 5. — OSSERVAZIONI.

1. Si riconosce facilmente che, se $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$ sono due funzioni permutabili tali che

$$\begin{aligned} \int_x^y \varphi_1(x, \xi) \varphi_1(\xi, y) d\xi &= \psi(x, y), \\ \int_x^y \varphi_2(x, \xi) \varphi_2(\xi, y) d\xi &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

essendo ψ una funzione di 2° ordine, deve aversi o

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$$

oppure

$$\varphi_1(x, y) = -\varphi_2(x, y)$$

(1) Vedi la Nota citata precedentemente: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* § 3.

2. Consideriamo l'equazione integrale

$$(9) \quad \varphi^n(x, y) = \psi(x, y)$$

ove φ è la incognita e il simbolo di potenza denota un'operazione di composizione, mentre la funzione data ψ è di ordine np multiplo dell'intero n . Con una trasformazione analoga a quella fatta nel § precedente potremo ricondurci al caso in cui

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{(y-x)^{np-1}} = 1.$$

Se conosciamo una funzione $\theta(x, y)$ di ordine p permutabile con $\psi(x, y)$ e tale che

$$\lim_{y=x} \frac{\theta^n(x, y)}{(y-x)^{pn-1}} = 1,$$

risolviamo l'equazione integrale

$$\psi(x, y) - \theta^n(x, y) = \int_x^y \chi(x, \xi) \theta^n(\xi, y) d\xi$$

nella ipotesi che le funzioni θ e ψ posseggano le derivate di ordine n^{esimo} . Calcolata la funzione incognita χ , avremo che la funzione

$$\begin{aligned} & \theta(x, y) + \frac{1}{n} \theta \chi(x, y) + \\ & + \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \theta \chi^2(x, y) + \dots + \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{n} - q + 1 \right)}{q!} \theta \chi^q(x, y) + \dots \end{aligned}$$

soddisfarà l'equazione (9).

3. Quando $\psi(x, y)$ è della forma $\psi(y-x)$, potremo prendere

$$\theta(x, y) = \frac{[(np-1)!]^{\frac{1}{n}}}{(p-1)!} (y-x)^{p-1}.$$

Nella ipotesi $p=1$, si ricade nella soluzione data in una Nota precedente (1).

(1) *Sopra le funzioni permutabili*. Rend. Acc. Lincei, Seduta 17 aprile 1910, § 4.

Chimica. — *Ebullizione delle soluzioni acquose di acido borico e sua volatilità in solventi diversi organici.* Nota del Socio R. NASINI e di F. AGENO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Studi sulla diffusione spontanea della fillossera.* Nota (26^a) del prof. B. GRASSI in collaborazione colla dott. A. FOÀ e dott. M. TOPI.

Dopochè colle nostre ricerche è stato tolto di mezzo per le viti nostrali il preconetto che le alate siano le forme più specialmente temibili per la diffusione della fillossera della vite, acquista grande importanza, dal punto di vista pratico, lo studio dei veri modi di spargersi di questa specie.

Da tale studio infatti possono derivare suggerimenti di alto valore nella lotta contro la fillossera; perchè se noi potessimo riuscire, con mezzi razionali e senza enormi spese, anche soltanto a rallentare di molto la marcia del flagello, avremmo in gran parte risolto l'arduo problema.

Non facciamo qui la critica delle numerose ipotesi che fino ad oggi sono state formulate, critica che avrà larga parte nel nostro lavoro in esteso, in corso di pubblicazione. Ci limitiamo soltanto ad esporre il risultato delle nostre ricerche, che ci portano alla conclusione che i modi ordinari di diffusione della fillossera, sempre per le viti europee, si riducono principalmente a due:

- 1) le prime larve che abbandonano le radici;
- 2) il trasporto di barbatelle, o di pezzi di radici infette.

Coll'uno o coll'altro modo si può avere la diffusione della fillossera da una vite all'altra in contiguità o a distanze non molto grandi; al secondo deve inoltre attribuirsi l'origine di nuovi focolari in luoghi immuni, a grande distanza dagli infetti.

Tralasciando il secondo, ci occupiamo qui soltanto del primo modo di infezione.

Si crede da tutti che le prime larve si fissino senza venire alla superficie del suolo, procedendo lungo la radice della vite, su cui sono nate, o ad altre viti attraverso il terreno e che soltanto in via eccezionale si portino alla superficie.

Su quest'ultima via di diffusione sono note le osservazioni e le ricerche del Faucon, che fino dal 1868 richiamava l'attenzione sulla fuoruscita delle

giovani fillossere dal terreno. Le sue diligenti osservazioni furono di volta in volta confermate o messe in dubbio; generalmente la scoperta fu ritenuta espressione di un fenomeno insolito o di piccola importanza, e successivamente venne quasi dimenticata; tutto ciò si deve soprattutto al pregiudizio della degenerazione delle fillossere senza l'intervento dell'uovo fecondato.

Il Girard, nel 1874, osservava che l'esistenza degli occhi nelle radicecole denotava un animale che, sotterraneo d'abitudine, può avere bisogno di venire alla superficie del suolo e di dirigersi alla luce del giorno.

I primi esperimenti sul modo di migrazione del parassita furono compiuti dal Fabre nel 1880. Esperimentando in tubi di vetro, notava che le giovani fillossere si portavano tutte alla estremità illuminata; egli non riuscì tuttavia a trovare una sola fillossera alla superficie del suolo nelle vigne fillosserate.

Nel 1890 il Mayet riassumeva esattamente lo stato della questione, attribuendo molta importanza alle osservazioni del Faucon, ed affermando che le giovani radicecole non passano mai sotterraneamente da un ceppo all'altro, a meno che due radici non si trovino a contatto. Secondo il Mayet, la ragione del fatto doveva ricercarsi nell'essere le zampe inermi della fillossera improprie a scavare il suolo e i tegumenti troppo molli per non essere schiacciati alla menoma pressione.

Il Moritz, nel 1893, riteneva dimostrato che la fillossera potesse uscire alla superficie, ed esperimentava con parziale successo sulla possibilità della fillossera di approfondirsi nel terreno e raggiungere le radici delle viti.

In Italia il Franceschini, nel 1895, scriveva di non essere mai riuscito a vedere alcuna fillossera alla superficie del terreno.

Il Danesi invece, nel 1903, basandosi sul progredire delle infezioni in Puglia, attribuiva grande importanza alle giovani radicecole che, portatesi attivamente alla superficie, vengono passivamente diffuse dai venti.

D'altra parte, che la fillossera si propaghi per via sotterranea da un ceppo all'altro, benchè nessuno ne abbia mai dato le prove, è stato ammesso e si ammette generalmente, come ho detto, nonostante che la straordinaria lentezza con cui la fillossera si è propagata e si propaga in certi vigneti, dovesse — come spiegherò meglio più avanti — far molto sospettare della realtà di un tal modo di diffusione. Ne è un esempio il vigneto del Franceschini a Zoverallo (Lago Maggiore), nel quale l'infezione artificialmente prodotta nel 1891 su tre viti, dopo cinque anni, si era appena estesa a trenta viti; una delle tre viti non ne aveva infettata nessun'altra fra quelle circostanti dopo tre anni (1894), nonostante che ne fosse separata solo da m. 1,50 di distanza. Qualcosa di simile abbiamo accertato anche noi in Toscana.

Il Del Guercio, nel 1892, affermava: « Si sa che questi pidocchi possono migrare traverso il terreno senza bisogno di venir fuori ». Ma non dava

nessuna prova positiva della sua asserzione. Nè maggior valore hanno le osservazioni del Moritz sulla maggiore estensione di un focolaio d'infezione dal luglio all'agosto.

Non è mancato chi si attendesse ad una via di mezzo: così Duclaux, che già da molti anni (1872), scriveva che « non vi è un modo generale d'invasione dell'insetto. Questo penetra ora per la superficie, ora per vie profonde e, in ogni caso, senza assoggettarsi nel suo lavoro ad una regola indissolubile, va facendo ciò che gli comandano le circostanze e lo stato del suolo dove si trova ». Questa opinione, come pure quella generalmente ammessa che la diffusione da vite a vite avvenga per via sotterranea, non tengono conto degli occhi delle fillossere, nè del loro istinto che le porta verso la luce.

Stando così le cose, fin dal momento in cui cominciammo ad occuparci della fillossera, ritenemmo opportuno riprendere in esame l'argomento.

Le prime nostre osservazioni (1906) sono state casuali. Avendo preparato bicchieri contenenti radici di viti infette mescolate ad un po' di terra per ottenere alate, abbiamo osservato sull'orlo di essi una quantità di piccole fillossere, che, raccolte, si rilevarono, senza eccezione, come prime larve.

Osservando i vasi, in cui si allevano le viti per gli esperimenti, si veggono facilmente camminare, sulla superficie della terra, le fillossere neonate, quando la terra è un po' secca.

Questi fenomeni si osservano d'estate e d'autunno, finchè dura il caldo; la maggior fuoruscita si verifica dalle 10 alle 15, ma anche prima e dopo non mancano forme emigranti. Nei bicchieri la migrazione si verifica anche quando la temperatura non è più tanto elevata, e dura tutta la giornata, finchè c'è luce.

Se si chiudono le imposte, o si copre il bicchiere con un recipiente opaco, dopo poco tempo non si trovano più neonate sull'orlo, ovvero vi si trovano in numero scarsissimo. Cercammo allora di sapere quale destino tocchi alle neonate che si trovano sull'orlo al momento in cui si fa artificialmente il buio: posando il bicchiere sopra la carta oleata, e coprendolo poi con una cassetta di cartone rivestita di carta nera, dopo quattro ore si trovò che la maggior parte delle neonate era scomparsa, ma la carta oleata ne aveva catturate soltanto una diecina, di cui cinque o sei aderenti alla periferia del bicchiere, dove toccava la carta. Evidentemente le fillossere in gran parte dovevano essere rientrate nella terra del bicchiere.

In un altro esperimento invece della carta oleata si usò un recipiente contenente un sottile strato di acqua. In questo caso le fillossere non rientrarono nella terra e si videro galleggiare sull'acqua, la quale evidentemente deve attrarle.

Successivamente si infossarono in una cassetta piena di terra, da un lato delle radici cariche di fillossere, dall'altro lato delle radici immuni, a circa

10 cm. di distanza le une dalle altre, e si coprì la cassetta con una campana annerita, in modo che non vi penetrasse la luce. Le radici immuni non si infettarono. L'esperimento, della durata di circa 15 giorni, fu ripetuto più di dieci volte in varie stagioni, soprattutto in agosto, sempre con identico risultato. In un caso, in cui le radici si trovavano a piccola distanza (circa due centimetri) l'infezione è avvenuta, benchè limitatissima, essendosi trovata una neonata fissata ed una che camminava sulle radici indenni (queste avevano forse già veduta la luce prima di cominciare l'esperimento).

Collo stesso scopo, furono poste in una stessa cassetta due barbatelle, l'una infetta e l'altra immune, in modo però che le radici si trovassero a qualche centimetro di distanza; la superficie del terreno fu ricoperta di uno strato di gesso per impedire la fuoruscita delle larve. L'esperimento fu fatto molte volte, ma le viti per lo più morirono; solo due volte resistettero e dopo circa un mese furono esaminate. In questi due casi le barbatelle già infette si presentavano ancora tali, una però meno di prima e l'altra con alcune nodosità nuove. Le due barbatelle immuni restarono tali. Non si può escludere che in questi casi il gesso seccando non si sia staccato dalle pareti della cassetta in modo da dare adito sia alla luce che al passaggio delle larve.

L'uscita delle larve può pure essere impedita coprendo la superficie del terreno con uno strato di sabbia cosiddetta immunizzante, come abbiamo verificato in numerosi esperimenti.

Altri esperimenti dello stesso genere abbiamo fatti, ma ci asteniamo dal riferirli perchè hanno dato risultati non differenti da quelli sopra citati.

Il Del Guercio, nel 1908, opponeva che « all'Elba, in quel di Piombino, ed altrove poi, aveva potuto notare che d'altronde le larve e le uova della forma ipogea resistono poco all'azione diretta dell'aria atmosferica, durante i mesi caldi, giacchè dopo poche ore, se l'aria non è umida, muoiono ». Il Del Guercio, non indica gli stadi delle larve che egli avrebbe osservate; noi non parliamo che delle neonate non ancora fissatesi, perchè solo di esse ammettiamo la migrazione. E veramente bastano le poche ore che il Del Guercio concede — di più nessuno ha mai pensato di invocarne — perchè le fillosere possano arrivare al loro destino; anche molto distante, se aiutate dal vento. È un fatto che meraviglia vederle camminare, per parecchio tempo, al sole cocente senza che apparentemente soffrano. Precisare questo tempo non è possibile; di solito in breve ci si sottraggono alla vista approfondendosi sotto terra; in Puglia, ed in piena estate, le abbiamo potute seguire per circa due ore alla superficie del terreno (Topi).

Altre esperienze abbiamo fatto mettendo nelle vigne europee sul terreno carte oleate di 20 X 20 cm., che tenevamo fissate agli angoli con pietre. Abbiamo così potuto catturare neonate tanto in terreni ghiaiosi quanto in terreni argillosi; certi giorni non se ne prendevano, in altri se ne prendevano una, due ed anche quattro per foglio.

Se consideriamo che i nostri fogli di carta rappresentavano, rispetto alla grandissima estensione della vigna, una quantità trascurabile, si comprende che dovevano allora uscire giornalmente centinaia di migliaia di neonate.

L'anno scorso, in Puglia (Trani), in un pomeriggio di luglio, presso il ceppo di una vite, il dott. Topi ha veduto venticinque neonate in uno spazio di circa un decimetro quadrato. Le neonate non sembravano avere una direzione determinata; d'altra parte il loro cammino era difficile: i granelli di terra, rotolando, trascinavano seco le fillosere. Anche nei giorni successivi, nello stesso luogo, fu notata qualche neonata. Le radici della vite, presso le quali si trovavano le neonate, erano piene di fillosere, ma la pianta era ancora in buono stato.

Le osservazioni fatte a Fauglia ed in Puglia, ci permettono di escludere in modo assoluto qualunque confusione colle neonate gallecole, che mancavano in quei territori; confusione che forse non fu potuta evitare qualche volta in Francia.

Per quanto riguarda il penetrare nel terreno delle fillosere fuoruscite, noi abbiamo ripetute le esperienze del Moritz, confermandole non solo, ma estendendole a viti che vivevano in vasi piuttosto grandi. In questi casi abbiamo potuto notare che le fillosere per entrare ed uscire dal vaso profitano spesso e volentieri dell'angusto vuoto che viene a formarsi tra il vaso e la terra quando dissecca.

Dal complesso dei nostri esperimenti e delle nostre osservazioni, riteniamo di poter concludere che le prime larve non si fissano senza prima aver migrato alla superficie del suolo, in piena luce; se la regola non patisca eccezioni, sarà oggetto di nuovi esperimenti.

Del resto questa migrazione era supponibile *a priori* considerando i caratteri della prima larva rispetto alla madre virginopara attera, per quanto riguarda le zampe e gli organi di senso; infatti nella prima larva le zampe sono relativamente più sviluppate, il rinario è non solo relativamente ma anche assolutamente più grande, gli occhi presso a poco eguali. Che anzi la presenza di occhi abbastanza sviluppati nelle fillosere ipogee trova giustificazione soltanto nell'essere la prima larva chiamata a circolare all'esterno, come hanno notato da molti anni il Girard ed il Fabre.

Solo ammettendo questo istinto di venire alla luce e tenendo conto della vita randagia delle neonate, può comprendersi come la fillosera non abbia già da molti anni distrutto tutte le viti italiane! Basta infatti pensare alla enorme cifra che costituirebbe la prole di una fillosera radicecola (virginopara attera) dopo le otto, in media, generazioni annuali, per convincersi che le neonate debbono andare incontro ad una dispersione molto superiore a quella che si potrebbe a tutta prima immaginare. Si pensi, d'altra parte, che le fillosere radicecole godono di una salute eccezionale; nessun parassita, nessuna malattia contrasta loro l'esistenza e non sono vittime frequenti di nessun predatore!

Il problema fillosserico — dopo le nostre osservazioni ed esperienze, le quali hanno ridotto ai minimi termini la temibilità delle alate come propagatrici nei vigneti europei, e hanno insegnato come le fillossere neonate non si fissano senza aver veduta la luce — ci sembra assumere un nuovo aspetto.

Certo conoscendo la necessità e l'istinto di venire alla luce delle neonate radicolose si vengono a rischiare tante questioni fino ad oggi rimaste insolte o non sufficientemente spiegate. Così la resistenza o l'immunità delle viti impiantate nelle sabbie può trovare una spiegazione sufficiente; così si spiegano i parziali successi talvolta ottenuti mettendo attorno ai ceppi delle viti certe sostanze, le quali, più che l'azione insetticida o insettifuga, prefissasi dall'inventore, avevano probabilmente un'azione ostacolante il cammino delle larve. Così infine viene ad essere spiegata la diffusione ora rapida, ora lentissima della fillossera, a seconda dei diversi terreni, e quindi la distruzione più o meno rapida dei vigneti; riteniamo anche che, conoscendo la composizione fisica del terreno ed il clima di una regione, sarà forse possibile determinare preventivamente con qualche approssimazione la probabile durata di un vigneto che presenti soltanto qualche vite infetta.

Ma la conoscenza del modo di diffusione della fillossera può avere una grandissima importanza pratica.

Perchè quando sarà determinato con la maggiore possibile esattezza il cammino che fanno le larve per venire alla luce, l'epoca ed il momento in cui avvengono in maggior copia le migrazioni, non sarà forse possibile ostacolarne od impedirne la fuoruscita? Riuscendo ad impedire alle larve di venire alla luce, non si potrebbe forse arrivare alla disinfezione delle piante?

Con quali mezzi ed in qual modo è possibile impedire la fuoruscita delle larve? Sarebbe sufficiente e pratico stendere alla superficie uno strato di sabbia? Su tutta la superficie del vigneto o solo parzialmente? Quali altri materiali potrebbero raggiungere il medesimo scopo?

Quali effetti può produrre riguardo alla fillossera la incoltura di un vigneto infetto? Quali la compressione del terreno?

Che cosa, insomma, può attendersi in pratica dalla conoscenza, a cui hanno condotto le nostre ricerche?

Questi sono i quesiti che ci sembrano avere grande importanza per il viticoltore, ed alla cui soluzione porteremo il nostro contributo, se il Ministero d'agricoltura vorrà continuare a dare per le nostre ricerche l'aiuto di cui ci è stato largo fin qui.

E qualunque possa esserne l'esito, crediamo non sarebbe piccola benevolenza per il Ministero d'agricoltura l'aver reso possibili questi studi e queste esperienze, riguardanti un problema di somma importanza per il nostro paese, il quale possiede ancora un capitale che si valuta a miliardi in viti europee non innestate e minacciate terribilmente dalla fillossera.

Chimica. — *Sulla presenza dell'Elio nelle Autunite e sul periodo di vita del Jonio*. Memoria del Corrisp. A. PIUTTI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Chimica. — *Il nitropirrolo* ⁽¹⁾. Nota del Corrisp. A. ANGELI e di LUIGI ALESSANDRI.

Prima ancora che la chimica dei derivati del pirrolo avesse raggiunto lo sviluppo cui è pervenuta, molto prima che fosse stato possibile stabilire tutte le interessanti analogie che si riscontrano fra i derivati di questo gruppo e gli altri composti ciclici, più volte venne tentato di preparare il nitropirrolo, con lo scopo principalmente di porre in rilievo nuove rassomiglianze e nuove differenze. Ma tutti questi tentativi rimasero privi di risultato, soprattutto per il fatto che il pirrolo ed i suoi omologhi vengono profondamente decomposti per azione dell'acido nitrico. Soltanto per via indiretta, trattando cioè con questo reattivo gli acidi pirrolocarbonici, la pirocolla, i chetoni pirrolici, ovvero i derivati alogenati del pirrolo, è stato possibile ottenere composti nei quali spesso il radicale negativo è stato sostituito dal gruppo dell'acido nitrico ⁽²⁾; ma in tutti questi casi si formano solamente prodotti polinitrati del pirrolo e mai il nitrocomposto fondamentale.

Allo scopo di poter preparare questo termine interessante, ancora qualche anno addietro ⁽³⁾ abbiamo tentato di applicare il nuovo metodo di nitrificazione proposto da uno di noi, nitrato d'etile in presenza di etilato sodico ovvero di sodio metallico, ed in questo modo si pervenne ad un prodotto, senza dubbio il sale sodico dell'acido pirrolnitronico, ma che all'aria spontaneamente s'infiama, e che perciò non ci fu possibile sottoporre ad uno studio ulteriore.

Ora noi abbiamo riprese le nostre esperienze, ed evitando opportunamente il sale allo stato di secchezza, finalmente siamo riusciti ad ottenere allo stato libero anche il

Nitropirrolo.

Ad una molecola di pirrolo diluito con etere si aggiunge un atomo di sodio ridotto in fili ed una molecola di nitrato d'etile.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto di studi superiori di Firenze.

⁽²⁾ Ciamician, Berliner Berichte, XXXVII, 4221.

⁽³⁾ Questi Rendiconti, vol. XI, 2° sem., pag. 16.

Durante la stagione invernale la reazione procede troppo lenta e perciò ponemmo la bevuta, chiusa con un tubo a potassa, sopra la stufa che serve a riscaldare la stanza da lavoro. In tal modo la reazione procede rapida, il sodio si scioglie con sviluppo di idrogeno, e dopo qualche giorno si separa un sale colorato in bruno. Quando tutto il sodio è scomparso si aggiungono pezzetti di ghiaccio, si estrae più volte con etere, ed il liquido acquoso, colorato in bruno, viene trattato con nero animale.

Assieme al sale sodico del nitropirrolo si forma sempre anche del nitrito sodico, ed è questo prodotto che va eliminato, altrimenti acidificando il liquido, l'acido nitroso che si libera è quello che decompone il nitropirrolo che si è formato.

A tale scopo il liquido viene trattato con eccesso di soluzione di nitrato d'argento che determina la separazione di un miscuglio costituito dal sale argenteo del nitropirrolo e nitrito d'argento. Il primo è insolubile in acqua, mentre il secondo viene completamente asportato per prolungati lavaggi.

Al sale che rimane, ancora umido, viene aggiunto cloruro sodico: in tal modo si separa cloruro d'argento e si ottiene una soluzione acquosa intensamente colorata in giallo, che contiene il sale sodico del nitropirrolo, e che viene sottoposta ad una corrente di anidride carbonica. Il liquido così ottenuto viene estratto ripetutamente con etere: per evaporazione del solvente rimane indietro un olio giallo che poi si rapprende in una massa cristallina. Si pone ad asciugare nel vuoto, ed il prodotto viene ripetutamente cristallizzato da ligroina, impiegando una piccola quantità di nero animale.

Si ottiene in tal modo una sostanza che allo stato di purezza si presenta sotto forma di pagliette splendenti, ovvero quando è cristallizzata lentamente, di prismi lievemente giallognoli e che rifrangono fortemente la luce. Fonde esattamente a $63^{\circ}.5$. È solubile nell'acqua, e da questa soluzione si separano lentamente grandi romboedri opachi, colorati del pari in giallo chiaro.

La soluzione acquosa, dopo aggiunta una goccia d'ammoniaca, con nitrato d'argento dà un precipitato giallo, che ha tutto l'aspetto del cromato di piombo.

gr. 0,1100 di sostanza diedero cc. 22,7 di azoto a 9° e 768 mm.

In cento parti:

Trovato	Calcolato per $C_4H_4N_2O_2$
N 25.24	25.00

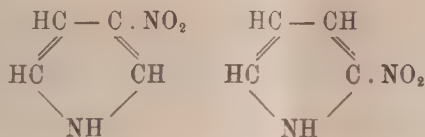
gr. 0,0795 di sale d'argento per riscaldamento dettero gr. 0,0392 di argento

In cento parti:

Trovato	Calcolato per $C_4H_4N_2O_2Ag$
Ag 49.31	49.31

La sostanza, riscaldata su lamina di platino, volatilizza, ed i vapori possiedono un odore che rassomiglia a quello del nitrobenzolo.

Le formole possibili sono due :



Tenendo conto però del fatto che nel nitrosopirrolo il residuo dell'acido nitroso va in posizione β — la prima è quella che si presenta come la più probabile.

Nitro- α - β '-dimetilpirrolo.

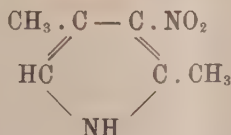
In modo perfettamente analogo si può ottenere anche il nitro- α - β -dimetilpirrolo: soltanto in questo caso la preparazione riesce molto più semplice, perchè il suo sale sodico è meno solubile in acqua di quello del nitropirrolo. Il miscuglio di sali che si ottiene per azione del sodio e nitrato di etile sull' α - β -dimetilpirrolo viene lavato con molto etere, posto a seccare nel vuoto e successivamente lavato con poca acqua calda. In tal modo il nitrito sodico rimane nell'acqua madre e per raffreddamento si separa il sale sodico del nitrodimetilpirrolo. Questo viene sciolto in acqua, trattato con anidride carbonica e quindi estratto ripetutamente con etere. Il residuo, purificato come si è fatto pel nitropirrolo, con ligroina e nero animale, fornisce dei prismi splendidi che fondono a 111° .

gr. 0,0694 di sostanza diedero cc. 11,6 di azoto a 9° e 764 mm.

In cento parti:

Trovato	Calcolato per $\text{C}_8\text{H}_9\text{N}_2\text{O}_2$
N 20,34	20,00

Riscaldata su lamina di platino anche questa sostanza dà vapori che hanno l'odore del nitrobenzolo. La sua struttura più probabile è la seguente:

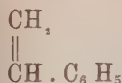


Tutti e due questi nitroderivati sono stabilissimi, in soluzione alcoolica, rispetto al permanganato.

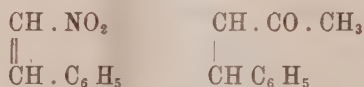
A questo riguardo noi abbiamo notata una gran differenza di comportamento fra i composti pirrolici ed i corrispondenti derivati del tiofene e del benzolo.

Infatti sono *stabili al permanganato*: benzolo, nitrobenzolo ed acetofenone; tiofene, nitrotiofene ed acetotienone; mentre invece è *instabile il pirrolo* da un lato, e dall'altro sono *stabilissimi* nitropirrolo e pirrilmetilchetone.

Nei composti a catena aperta l'ossidabilità dei doppi legami si mantiene anche nei loro derivati; ed infatti sono instabili al permanganato lo stirolo:



come anche il nitrostirolo ed il benzilidenacetone:



Ancora perciò non si comprende, in base alle solite formule, per quale ragione la sostituzione di un atomo di idrogeno del pirrolo col residuo nitrico od acetico abbia da rendere i doppi legami insensibili rispetto al permanganato di potassio.

Continueremo lo studio di queste reazioni.

Chimica. — *Azione degli acidi nitroso e nitrico sull'indolo e sul pirrolo.* Memoria del Corrispondente ANGELO ANGELI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Meccanica. — *Sulla biforcazione di una vena liquida.* Nota I di U. CISORTI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

1. — PRELIMINARI.

Un velo liquido che scorre in un piano, tra due *linee libere* λ' e λ'' , investe un *profilo rigido* γ , interposto sul suo cammino, indi si biforca (fig. 1).

Si pensi, per fissare le idee, ad una corrente in seno ad un canale (il cui moto avviene, sensibilmente, per piani orizzontali, col medesimo comportamento lungo una stessa verticale) la quale vada a battere contro una delle pile che sorreggono un ponte gettato sovra il canale stesso, oppure contro un ostacolo qualunque.

Possiamo renderci conto dell'andamento qualitativo del moto nel modo seguente.

La vena proviene dall'infinito (praticamente da una distanza abbastanza grande da γ), dove essa ha velocità costante (in valore assoluto) che possiamo assumere $=1$, e i filetti liquidi scorrono, paralleli fra loro e, in particolare, quindi alle linee libere λ' e λ'' . Il filetto f che primo fra tutti colpisce il profilo γ in un certo punto O , si arresta, indi si biforca: un ramo segue un tratto ϖ_1 , e l'altro un tratto ϖ_2 , di γ fino a due punti P_1 e P_2 rispettivamente, in cui abbandonando entrambi il profilo rigido vanno a formare le linee libere λ_1 e λ_2 che si protendono indefinitamente

Piano $z = x + iy$

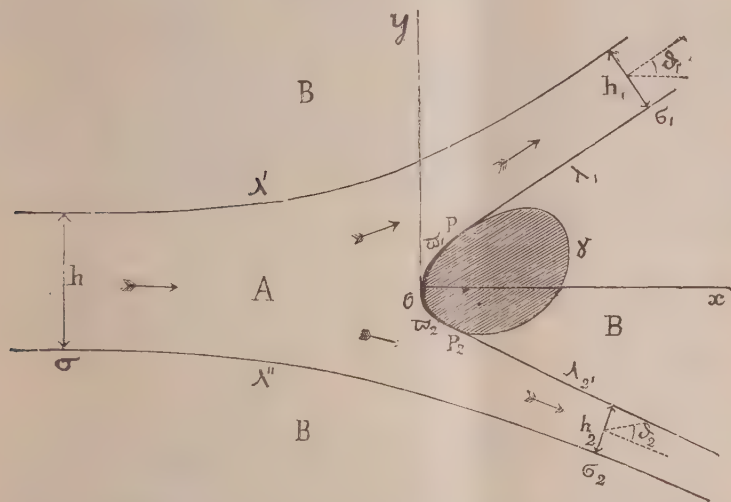


FIG. 1.

a valle. Gli altri filetti, accostandosi a γ , vengono più o meno deviati, ma nessuno subisce arresti: quelli a sinistra di f (rispetto al senso della corrente) vanno a formare la vena limitata tra λ' e $\varpi_1 + \lambda_1$; quelli di destra vanno a formare la vena che scorre tra λ'' e $\varpi_2 + \lambda_2$ (¹).

Indico con A il campo del moto che, per quanto si è ora detto, risulta semplicemente connesso e limitato dalle linee libere λ' , λ'' , λ_1 , λ_2 e dai tratti di parete rigida ϖ_1 e ϖ_2 .

Si assuma sul piano stesso una coppia di assi ortogonali coll'origine in O ; l'asse x sia diretto, come la vena a monte, nel senso della corrente; l'asse y sia diretto verso sinistra.

(¹) Quando la vena a monte diviene infinitamente larga, si ha il caso trattato da Levi-Civita. *Scie e leggi di resistenza* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1907, tomo XXIII, pp. 1-37). Il problema più generale che sto per esporre è del resto una nuova applicazione del metodo escogitato da Levi-Civita in detta Memoria.

Sieno: ϑ_1 e ϑ_2 le inclinazioni, sull'asse x , delle direzioni assintotiche delle vene a valle; tali angoli vanno contati positivamente nel verso $x \rightarrow y$, negativamente nel verso opposto; 2α l'angolo delle due tangenti in O a ω_1 e ω_2 ($2\alpha = \pi$ quando O è un punto ordinario, non angoloso); $\delta + \alpha$ l'angolo che la tangente a ω_1 , nel senso del flusso, forma colla direzione positiva dell'asse x ; l'angolo dell'analoga tangente a ω_2 sarà allora $\delta - \alpha$ ($\delta = 0$ quando γ è simmetrico e simmetricamente orientato rispetto alla direzione del moto).

Indico con B ciò che rimane del piano del moto quando se ne tolga A e l'area racchiusa (eventualmente) dal profilo γ . La regione B sia occupata (totalmente, o quanto meno in prossimità di γ e delle linee λ) da fluido in quiete. Il moto in A sia regolare, avvenga in assenza di forze di massa, e sia *permanente ed irrotazionale*.

Allora, essendo u e v le componenti della velocità nel punto generico (x, y) , esisteranno: un *potenziale di velocità* $\varphi(x, y)$ ed una *funzione di corrente* $\psi(x, y)$, armoniche e regolari in A, definite rispettivamente dalle equazioni ai differenziali totali

$$(1) \quad \begin{cases} d\varphi = udx + vdy, \\ d\psi = -vdx + udy, \end{cases}$$

colle determinazioni $\varphi = \psi = 0$ in O.

2. — PRESSIONE. CONDIZIONI AI LIMITI.

Assumo $= 1$, per maggiore comodità, la densità (costante) del liquido. In A si ha, per ipotesi, moto irrotazionale e permanente, in assenza di forze di massa.

Le equazioni idrodinamiche si compendiano perciò nella seguente relazione fra la pressione p ed il valore assoluto $V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$ della velocità nel punto generico (x, y) ,

$$p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante.}$$

Oltre il contorno di A (nella regione confinante B) si ha, per ipotesi, fluido in quiete; ivi regna pertanto una pressione costante p_0 . Sulle linee libere l'eguaglianza della pressione porge

$$p_0 = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante,}$$

cioè V è essa stessa costante sopra queste linee.

Siccome $\lambda', \lambda'', \lambda_1, \lambda_2$ si estendono indefinitamente, e nei punti di A a distanza infinita, a monte, è $V = 1$, così sarà

$$(2) \quad V = 1, \text{ sopra } \lambda', \lambda'', \lambda_1, \lambda_2.$$

Dalla relazione $p_0 = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante}$, scende poi che la costante ha il valore $p_0 + \frac{1}{2}$; quindi in ogni punto di A

$$(3) \quad p = p_0 + \frac{1}{2} (1 - V^2).$$

La funzione $\psi(x, y)$ che, come abbiamo accennato, è armonica in A, deve assumere sopra λ', λ'' e $\lambda_2 + \varpi_2 + \varpi_1 + \lambda_1$ valori costanti e diversi tra loro, come è ben noto, trattandosi di linee di flusso.

Poichè è $\psi = 0$ la O, si dovrà avere

$$(4) \quad \psi = 0, \text{ sopra } \lambda_1, \varpi_1, \varpi_2, \lambda_2.$$

Poniamo

$$(5) \quad \begin{cases} \psi = h_1, & \text{sopra } \lambda', \\ \psi = -h_2, & \text{sopra } \lambda''; \end{cases}$$

h_1 e h_2 rappresentano così le *portate* [e quindi per la (2) anche le larghezze assintotiche] delle vene a valle.

Va notato che, pel carattere permanente del moto, designando h la *portata* [e quindi la larghezza assintotica] della vena a monte, si deve avere $h = h_1 + h_2$.

Le (2), (4), (5) esauriscono le condizioni ai limiti.

3. — LA VARIABILE COMPLESSA $z = x + iy$ E LE FUNZIONI w, f, ω .

Posto al solito

$$(6) \quad \begin{cases} x + iy = z, \\ u - iv = w, \\ \varphi + i\psi = f, \end{cases}$$

per le (1) w ed f risultano funzioni di $z = x + iy$, e le (1) stesse si compendiano nella relazione

$$(7) \quad \frac{df}{dz} = w.$$

La $w(z)$ dev'essere naturalmente regolare in A senza mai annullarvisi [cfr. n. 1] e deve mantenersi finita anche all'infinito. Il suo comportamento al contorno si caratterizza come segue.

Pongasi

$$(8) \quad w = e^{-i\omega},$$

convenendo che per $z = \infty$ [$|w| = 1$] sia $\omega = 0$; rimane così definita una funzione $\omega(z)$, regolare anch'essa entro A .

Dalla (8), posto

$$(9) \quad \omega = \vartheta + i\tau, \quad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}),$$

si deducono le

$$(10) \quad \begin{cases} |w| = |\sqrt{u^2 + v^2}| = V = e^\tau, \\ \frac{u + iv}{V} = e^{i\vartheta}. \end{cases}$$

La parte reale ϑ , che, come apparisce da quest'ultima, definisce la direzione delle linee di flusso, va contata fra $-\pi$ e π , positivamente nel verso $x \rightsquigarrow y$, partendo dalla direzione positiva dell'asse x , negativamente nel verso opposto.

Dopo ciò, per le precedenti tenuto conto della (2), si ha senz'altro

$$(11) \quad \begin{cases} \tau = 0, \text{ sopra } \lambda', \lambda'', \lambda_1, \lambda_2; \\ \lim \vartheta = \delta + \alpha, \text{ avvicinandosi a } O \text{ sopra } \omega_1, \\ \lim \vartheta = \delta - \alpha, \text{ avvicinandosi a } O \text{ sopra } \omega_2, \end{cases}$$

la ϑ dovendo naturalmente seguire anche negli altri punti di ω_1 e ω_2 l'andamento del profilo rigido.

Lasciando per ora indeterminata la forma del profilo ci basterà ritenere che la funzione $\omega(z) = \vartheta(x, y) + i\tau(x, y)$ dev'essere regolare entro A ; sul contorno la sua parte reale ed il coefficiente dell'immaginario devono soddisfare alle (11); di più che sia $\omega = 0$ per $z = \infty$.

4. — CAMBIAMENTI DI VARIABILE.

È opportuno eseguire dei cambiamenti di variabile che permettano di sostituire al campo A un semicerchio. Considerando il piano complesso rappresentativo della variabile $f = \varphi + i\psi$, si constata, in modo analogo a quello che ho esposto in una recente Nota ⁽¹⁾, che la $f = f(z)$ permette di rappresentare in modo conforme il campo A del piano z sopra una striscia

⁽¹⁾ Cfr. Cisotti, *Sopra la derivazione dei canali*. Zeitschr. für Math. und Physik, 1911, B. 59, Heft 2, pp. 137-151.

Ai punti f_1 ed f_2 (rappresentativi dei punti P_1 e P_2 del piano z) corrispondono, a norma dell'ultima delle (12), due punti F_1 ed F_2 definiti dalle relazioni

$$(13) \quad e^{-f_r + \varphi_0} = (1 - F_r)^{\frac{h_1}{\pi}} (1 + F_r)^{\frac{h_2}{\pi}} \quad (r = 1, 2).$$

Posto

$$(14) \quad a = \frac{1}{2} (F_1 - F_2) \quad , \quad b = \frac{1}{2} (F_1 + F_2),$$

i successivi cambiamenti di variabili definiti dalle relazioni ⁽¹⁾

$$(15) \quad F = aZ + b,$$

$$(16) \quad Z = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

consentono di rappresentare in definitiva il campo A sopra il semicerchio $|\zeta| \leq 1$, di ordinate positive, nel piano della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$

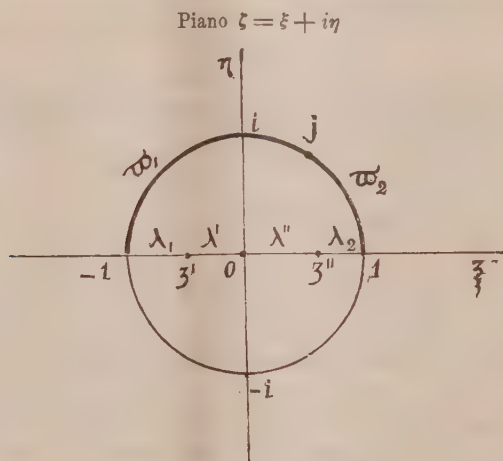


FIG. 3.

(fig. 3), in modo che, le linee libere del piano del moto vengano rappresentate sul diametro $(1, -1)$, mentre le pareti rigide ω_1 e ω_2 sopra la semicirconferenza $(1, i, -1)$.

⁽¹⁾ Cfr. Levi-Civita, loc. cit., pp. 12-13; od anche Cisotti, *Vene fluenti*. Rend. Circ. Mat. di Palermo (1908), tomo XXV, pp. 154-156.

E precisamente, posto (si noti che $\left| \frac{b - F_0}{a} \right| < 1$)

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \cos \sigma_0 = \frac{b - F_0}{a} \quad , \quad j = e^{i\sigma_0} \quad , \quad \frac{1 - b}{a} = -\frac{1}{2} \left(\zeta' + \frac{1}{\zeta'} \right) , \\ \frac{1 + b}{a} = \frac{1}{2} \left(\zeta'' + \frac{1}{\zeta''} \right) , \end{array} \right.$$

i due tratti $(-1, j)$ e $(1, j)$ della semicirconferenza corrispondono ai due pezzi di parete rigida ω_1 e ω_2 ; mentre che i tratti $(-1, \zeta')$ e $(1, \zeta'')$ dell'asse reale rappresentano rispettivamente le linee libere λ_1 e λ_2 ; infine i tratti $(0, \zeta')$ e $(0, \zeta'')$ fanno riscontro alle linee libere λ' e λ'' . In tal modo j rappresenta il punto O , e i punti $0, \zeta', \zeta''$ corrispondono ai punti all'infinito delle vene, rispettivamente a monte e a valle.

Considerando pertanto la $\omega = \vartheta + i\tau$ del n. precedente come funzione dell'argomento ζ nel semicerchio, essa deve essere regolare nei punti interni, e per le (11) reale sull'asse reale, mentre sulla semicirconferenza

$$\lim \vartheta = \begin{cases} \delta + \alpha, & \text{quando } \zeta \text{ si avvicina a } j \text{ lungo l'arco } (-1, j), \\ \delta - \alpha, & \text{quando } \zeta \text{ si avvicina a } j \text{ lungo l'arco } (1, j); \end{cases}$$

di più dev'essere $\omega = 0$ per $\zeta = 0$.

Poichè la ω assume valori reali sull'asse reale, pel principio di Schwarz essa è continuabile per riflessione analitica nel sottostante semicerchio; essa è quindi regolare in tutto il cerchio $|\zeta| < 1$ e sulla semicirconferenza $(1, -i, -1)$ ha il comportamento che risulta per riflessione.

5. — INTEGRALE GENERALE.

Pongo ⁽¹⁾

$$(18) \quad \omega_0(\zeta) = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log i \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta}.$$

La funzione $\omega_0(\zeta)$ è reale sul diametro $(1, -1)$, regolare per $|\zeta| < 1$ e sulla circonferenza $|\zeta| = 1$ si comporta nel modo voluto. Ciò posto, designi $\Omega(\zeta)$ una funzione di ζ , reale sull'asse reale, regolare per $|\zeta| < 1$, e tale che

$$(19) \quad \Omega(j) = \Omega\left(\frac{1}{j}\right) = 0,$$

e inoltre

$$(20) \quad \Omega(0) = \omega_0(0) = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right).$$

⁽¹⁾ Cfr. Levi-Civita, loc. cit., pp. 23-24.

Si può concludere che la funzione

$$(21) \quad \omega = \omega_0 - \Omega$$

soddisfa nel modo più generale alle condizioni specificate alla fine del numero precedente; *essa costituisce pertanto l'integrale generale dei moti in questione.*

In una prossima Nota mi occuperò dell'azione meccanica esercitata dalla vena sul profilo γ , illustrando queste generalità con un esempio concreto.

Meccanica. — *Sopra un caso di emisimmetria che si presenta in certe questioni di Idrodinamica.* Nota di G. COLONNETTI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Nello studio del moto dei fluidi guidati in tutto od in parte da pareti rigide simmetriche rispetto ad un dato piano Π , accade non di rado di imbattersi in casi nei quali gli elementi determinanti il fenomeno soddisfano ad una specie di emisimmetria, cioè sono tali che in punti simmetrici rispetto a Π i parametri scalari sono gli stessi, ed i vettori hanno determinazioni simmetriche, eccezion fatta per le velocità per le quali la simmetria risulta accompagnata da una inversione nel senso.

Ora in consimili casi si ammette da molti idraulici che il sistema delle linee di flusso dipenda, oltrechè da tutti gli altri elementi determinanti, anche dal senso delle velocità, epperò non debba necessariamente presentarsi simmetrico rispetto al piano Π ; si ammette cioè che quell'emisimmetria degli elementi determinanti il fenomeno non sia causa sufficiente a determinare un'analogia emisimmetria di tutto il fenomeno ⁽¹⁾.

Le brevi ed elementarissime osservazioni che seguono ci permetteranno di asserire il contrario.

*
* *

Un fluido perfetto a temperatura costante, si muova con moto continuo e permanente in una certa regione dello spazio che supporremo, per fissar le idee, semplicemente connessa ed estendentesi fino all'infinito sia a monte che a valle del moto. Detta regione sarà, nel caso più generale, limitata in parte da pareti rigide fisse, ed in parte da superficie di discontinuità o superficie libere, separanti il fluido in moto da un fluido che noi riterremo occupante tutto il resto dello spazio, in quiete, a pressione costante p_0 .

⁽¹⁾ È in sostanza a questo concetto fondamentale che fanno capo le note teorie di Herrmann e di Bach sugli effetti dei cambiamenti di direzione delle vene liquide. La Memoria originale di Herrmann: *Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen* (Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbflusses in Preussen, 1884) venne pubblicata in volume separato nel 1887 e ripubblicata invariata nel 1904 (cfr. pag. 7

Indicato con \mathbf{F} il vettore che rappresenta la forza agente in un punto generico P del campo del moto (riferita all'unità di massa) e con \mathbf{v} il vettore velocità nel punto generico stesso, l'equazione di continuità del moto (permanente) può scriversi ⁽¹⁾:

$$(1) \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

ρ essendo la densità del fluido nel punto generico P legata alla corrispondente pressione p dell'equazione caratteristica

$$(2) \quad \rho = f(p).$$

Le equazioni generali del moto, scritte sotto la forma di Eulero, si compendiano per altra parte nell'unica relazione ⁽²⁾

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

da integrarsi tenendo presenti le condizioni ai limiti.

Ora, detta $\Psi(P) = 0$ l'equazione di una qualsiasi superficie limitante il campo del moto, dovrà aversi identicamente

$$(4) \quad \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \Psi = 0$$

per tutti gli elementi fluidi pei quali Ψ si annulla. Se la superficie in questione è una parete rigida, la Ψ è data: se è una superficie libera, la sua equazione altro non è che $p - p_0 = 0$: per essa la (4) diviene adunque

$$(5) \quad \mathbf{v} \times \operatorname{grad} p = 0.$$

dell'ultima edizione) Le più note conseguenze di quelle teorie vennero recentemente riconosciute in opposizione coll'esperienza da Bánki: *Ueber unrichtige Anwendung hydraulischer Sätze* (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Band 53, 1909, pp. 1490-1496). Dei risultati delle esperienze di Bánki non mi occuperò qui, avendo già avuto occasione di dimostrare che essi sono suscettibili di una completa ed esauriente conferma teorica nelle mie recenti ricerche: *Sul moto di un liquido in un canale* (in corso di stampa nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo). Mi basta qui far notare che le principali conclusioni a cui il Bánki è stato, in via sperimentale, condotto, concordano perfettamente colle considerazioni esposte in questa Nota: considerazioni le quali peraltro sembrano suscettibili di una assai maggiore generalità. Così, per esempio, esse potrebbero con vantaggio esser tenute presenti nello studio della distribuzione dei vortici che caratterizzano il moto dei fluidi nei tubi in vicinanza di ogni gomito come di ogni variazione brusca di sezione: vortici a cui, nei trattati di idraulica, vengono attribuite, in base a pochi ed incompleti dati sperimentali, forme e posizioni le più svariate e, non di rado, le più irrazionali.

⁽¹⁾ Uso qui le notazioni proposte dai professori C. Burali-Forti e R. Marcolongo nei loro *Elementi di Calcolo Vettoriale* (Bologna 1909 e Parigi 1910).

⁽²⁾ Cfr. T. Boggio, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'idrodinamica*. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 30 gennaio 1910.

Con ciò il moto resta completamente determinato quando siano date (in modo opportuno e compatibile) le condizioni all'infinito, cioè le velocità assintotiche \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 rispettivamente a monte ed a valle del movimento. In particolare risulta determinato l'intero sistema delle linee di corrente caratterizzate, come si sa, dall'equazione generale

$$(6) \quad \mathbf{v} \wedge d\mathbf{P} = 0.$$

Ciò premesso si osservi che il vettore $-\mathbf{v}$, definito come il vettore \mathbf{v} in tutto il campo del moto, e come esso soddisfacente alle (1), (4) e (5), può assumersi come velocità di un nuovo moto dello stesso fluido, svolgentesi in quel medesimo campo, fra le stesse pareti rigide, colle identiche superficie libere.

Se \mathbf{F} si mantiene in ogni punto invariato, *se cioè il fluido è soggetto ancora all'azione delle medesime forze* ⁽¹⁾, restano invariate, in virtù delle (2) e (3), così la pressione come la densità in ciascun punto. Le linee di corrente del nuovo moto sono, come appare dalla (6), quelle stesse del moto dato, ma percorse in senso contrario; in particolare le velocità assintotiche \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 si sono cambiate rispettivamente in $-\mathbf{v}_1$ e $-\mathbf{v}_2$.

Dimostrata così, in generale, l'invertibilità del moto, introduciamo la ipotesi che le condizioni determinanti il fenomeno primitivo soddisfino alla supposta emisimmetria rispetto al piano Π . Debbono allora in particolare risultare simmetrici rispetto a Π i vettori \mathbf{v}_1 e $-\mathbf{v}_2$ o, ciò che fa lo stesso, $-\mathbf{v}_1$ e \mathbf{v}_2 .

Ora in questa condizione di cose tutte le grandezze (scalari, geometriche e vettoriali) le quali caratterizzano, determinandolo, l'ipotetico moto inverso, si possono ottenere dalle condizioni determinanti il fenomeno diretto dato, per riflessione rispetto a Π . Lo stesso perciò deve potersi dire dell'intero sistema delle linee di corrente le quali dovranno, per simmetria rispetto a Π , trasformarsi in se stesse; dovranno per conseguenza ammettere tutte quel piano per piano di simmetria.

Ciò che si è detto delle linee di corrente vale in particolare naturalmente anche così per le superficie vorticoso come per le superficie libere che limitano, insieme alle pareti rigide date, il campo del moto.

(¹) Restano così escluse dalle nostre considerazioni le sole forze che dipendono dal senso della velocità: in particolare le resistenze d'attrito, come del resto avevamo presupposto fin dal principio.

Matematica. — *Sul criterio di Stéphanos.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Come è noto, Stéphanos ⁽¹⁾ ha dato come condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione di due variabili $K(xy)$ sia rappresentabile nella forma

$$(I) \quad K(xy) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y)$$

— ove le $\alpha_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots m$) e le $\beta_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots m$) sono rispettivamente m funzioni linearmente indipendenti della sola x ed m funzioni linearmente indipendenti della sola y — la seguente: che il determinante

$$\begin{vmatrix} K & \frac{\partial K}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^m K}{\partial x^m} \\ \frac{\partial K}{\partial y} & \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{m+1} K}{\partial x^m \partial y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^m K}{\partial y^m} & \frac{\partial^{m+1} K}{\partial x \partial y^m} & \dots & \frac{\partial^{2m} K}{\partial x^m \partial y^m} \end{vmatrix}$$

sia identicamente nullo.

Questo risultato è una semplice conseguenza del ben noto teorema relativo al Wronskiano di m funzioni di una sola variabile, e come tale è suscettibile di critiche dello stesso genere di quelle che possono muoversi contro tal teorema ⁽²⁾.

Noi mostreremo in questa Nota come, procedendo per altra via, si possa con tutta sicurezza stabilire una proprietà caratteristica delle funzioni della forma (I). Potremo limitarci al caso che la funzione $K(xy)$ sia simmetrica in x ed in y , perchè è ben noto ⁽³⁾ che, data una funzione di due variabili $K(xy)$ qualunque, purchè finita e continua per

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ a &\leq y \leq b, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Ved. Stéphanos, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tom. XVIII, 1904.

⁽²⁾ Ved. ad es. Peano, Rend. Acc. Lincei (5), tom. VI, 1897, 1° sem., pag. 413.

⁽³⁾ Ved. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.*

1 Teil, § 14 (Math. Ann., Bd. 63).

ciascuna delle due funzioni *simmetriche*

$$\int_a^b K(x\xi) K(y\xi) d\xi \quad \int_a^b K(\xi x) K(\xi y) d\xi$$

per gli stessi valori di x ed y risulta della forma (I) allora ed allora soltanto che lo sia la funzione assegnata.

Sia dunque $K(xy)$ una funzione simmetrica di x ed y finita e continua nel campo S a due dimensioni, definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ a &\leq y \leq b. \end{aligned}$$

Poniamo, secondo il solito,

$$K_2(xy) = \int_a^b K(x\xi) K(\xi y) d\xi \quad K_3(xy) = \int_a^b K_2(x\xi) K(\xi y) d\xi \dots$$

$$K_r(xy) = \int_a^b K_{r-1}(x\xi) K(\xi y) d\xi \dots,$$

ed anche

$$c_r = \int_a^b K_r(\xi\xi) d\xi. \quad (r = 1, 2, \dots)$$

Con queste denominazioni avremo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione simmetrica $K(xy)$ in tutto il campo S risulti della forma (I), è che si possa trovare un numero $n \leq m$ tale che risultino contemporaneamente soddisfatte le tre relazioni:

$$(\alpha) \quad \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ . & . & . & . \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(\beta) \quad \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+2} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+3} \\ . & . & . & . \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+2} \end{vmatrix} = 0$$

$$(\gamma) \quad \begin{vmatrix} m & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ . & . & . & . \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} = 0 \quad (1).$$

(1) Si noti che nessuna delle tre condizioni (α) (β) (γ) è una conseguenza delle altre due. Ad es., ponendo

$$K(xy) = \frac{1}{4\pi} \sin x \sin y + \frac{1}{4\pi} \cos x \cos y + \frac{1}{\pi} \sin 2x \sin 2y$$

ed $a = 0$, $b = 2\pi$, $m = 2$, per $n = 1$ risultano verificate le condizioni (α) (γ) senza che lo sia la (β) .

Per dimostrare che le condizioni enunciate sono necessarie, cominciamo dall'osservare che se la funzione simmetrica $K(xy)$ in tutto il quadrato S sarà della forma (I), il nucleo dell'equazione integrale

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

sarà simmetrico ed elementare: e se indichiamo con

$$u_{1,1}(x) \ u_{1,2}(x) \dots u_{1,m_1}(x); \dots; u_{i,1}(x) \ u_{i,2}(x) \dots u_{i,m_i}(x); \dots; \\ u_{n,1}(x) \ u_{n,2}(x) \dots u_{n,m_n}(x)$$

un suo sistema perfetto ortogonale normalizzato — intendendo che le funzioni

$$u_{i,1}(x) \ u_{i,2}(x) \dots u_{i,m_i}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

appartengano ad uno stesso valore eccezionale λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — avremo in tutto il campo S

$$K(xy) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_1^{m_1} u_{1,r}(x) u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_i} \sum_r^{m_i} u_{i,r}(x) u_{i,r}(y) + \dots + \\ + \frac{1}{\lambda_n} \sum_r^{m_n} u_{n,r}(x) u_{n,r}(y).$$

Di qui segue immediatamente che sarà pure in tutto il campo S

$$K_2(xy) = \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_r^{m_1} u_{1,r}(x) u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_i^2} \sum_r^{m_i} u_{i,r}(x) u_{i,r}(y) + \dots + \\ + \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_r^{m_n} u_{n,r}(x) u_{n,r}(y)$$

.....

$$K_n(xy) = \frac{1}{\lambda_1^n} \sum_r^{m_1} u_{1,r}(x) u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_i^n} \sum_r^{m_i} u_{i,r}(x) u_{i,r}(y) + \dots + \\ + \frac{1}{\lambda_n^n} \sum_r^{m_n} u_{n,r}(x) u_{n,r}(y)$$

$$K_{n+1}(xy) = \frac{1}{\lambda_1^{n+1}} \sum_r^{m_1} u_{1,r}(x) u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_i^{n+1}} \sum_r^{m_i} u_{i,r}(x) u_{i,r}(y) + \dots + \\ + \frac{1}{\lambda_n^{n+1}} \sum_r^{m_n} u_{n,r}(x) u_{n,r}(y).$$

Ora, il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_1^2} & \frac{1}{\lambda_2^2} & \dots & \frac{1}{\lambda_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\lambda_1^n} & \frac{1}{\lambda_2^n} & \dots & \frac{1}{\lambda_n^n} \end{vmatrix}$$

è certamente differente da zero, e d'altra parte le funzioni

$$u_{i,j} (j = 1, 2, \dots m_i; i = 1, 2, \dots n)$$

sono linearmente indipendenti. Ne segue che le funzioni

$$K_1(xy) \equiv K(xy), K_2(xy), \dots, K_n(xy)$$

non potranno esser legate in tutto il campo S da alcuna relazione lineare.

Invece per gli stessi valori di x ed y sarà

$$\begin{vmatrix} K_1(xy) & \frac{1}{\lambda_1} & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \\ K_2(xy) & \frac{1}{\lambda_1^2} & \dots & \frac{1}{\lambda_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n+1}(xy) & \frac{1}{\lambda_1^{n+1}} & \dots & \frac{1}{\lambda_n^{n+1}} \end{vmatrix} = 0;$$

e se poniamo

$$K_0(xy) = \sum_1^{m_1} u_{1,r}(x) u_{1,r}(y) + \dots + \sum_1^{m_i} u_{i,r}(x) u_{i,r}(y) + \dots + \\ + \sum_1^{m_n} u_{n,r}(x) u_{n,r}(y),$$

sarà pure

$$\begin{vmatrix} K_0(xy) & 1 & \dots & 1 \\ K_1(xy) & \frac{1}{\lambda_1} & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_n(xy) & \frac{1}{\lambda_1^n} & \dots & \frac{1}{\lambda_n^n} \end{vmatrix} = 0.$$

Per il ben noto criterio di Gramme relativo alla dipendenza lineare di più funzioni di un numero qualunque di variabili, non potendo nessuna delle

funzioni K_2, K_3 ecc., come nucleo iterato di un nucleo simmetrico, essere identicamente nulla, potremo allora concludere che sarà

$$(A) \quad \left| \int_a^b \int_a^b K_i(xy) K_k(xy) dx dy \right| \neq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

$$(B) \quad \left| \int_a^b \int_a^b K_i(xy) K_k(xy) dx dy \right| = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n+1)$$

$$(C) \quad \left| \int_a^b \int_a^b K_i(xy) K_k(xy) dx dy \right| = 0. \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

D'altra parte si vede subito che si ha

$$\int_a^b \int_a^b K_i(xy) K_k(xy) dx dy = \int_a^b K_{i+k}(xx) dx \quad (i, k = 0, 1, \dots);$$

cioè, posto per un momento $c_0 = m$,

$$\int_a^b \int_a^b K_i(xy) K_k(xy) dx dy = c_{i+k}. \quad (i, k = 0, 1, \dots)$$

Servendosi della formola ora scritta, si vede immediatamente che le condizioni (A), (B), (C) coincidono rispettivamente colle (α), (β), (γ). Resta così dimostrato che le condizioni enunciate sono necessarie.

Per dimostrare che tali condizioni sono anche sufficienti, cominceremo dall'osservare che se è

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+2} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+2} \end{vmatrix} = 0,$$

necessariamente le funzioni

$$K_1(xy), K_2(xy), \dots, K_n(xy), K_{n+1}(xy),$$

nessuna delle quali, come abbiamo già osservato, può essere identicamente nulla, risulteranno legate in tutto il campo S da una relazione lineare

$$a_n K_1 + a_{n-1} K_2 + \dots + a_1 K_n + a_0 K_{n+1} = 0.$$

Di qui segue subito che qualunque sia il numero intero e positivo r avremo in tutto il campo S

$$a_n K_r + a_{n-1} K_{r+1} + \dots + a_1 K_{n+r-1} + a_0 K_{n+r} = 0,$$

ed anche, indicando con λ un parametro arbitrario,

$$a_n \lambda^r K_r + \frac{1}{\lambda} a_{n-1} \lambda^{r+1} K_{r+1} + \dots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} a_1 \lambda^{n+r-1} K_{n+r-1} + \frac{1}{\lambda^n} a_0 \lambda^{n+r} K_{n+r} = 0.$$

Avremo dunque, per gli stessi valori di x ed y ,

$$a_n \sum_1^r \lambda^i K_i + \frac{1}{\lambda} a_{n-1} \left\{ \sum_1^{r+1} \lambda^i K_i - \lambda K_1 \right\} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^{n-1}} a_1 \left\{ \sum_1^{r+n-1} \lambda^i K_i - \lambda K_1 - \dots - \lambda^{n-1} K_{n-1} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^n} a_0 \left\{ \sum_1^{r+n} \lambda^i K_i - \lambda K_1 - \dots - \lambda^n K_n \right\} = 0.$$

Ne segue che se indichiamo, secondo il solito, con $\Gamma(xy\lambda)$ il nucleo risolvente dell'equazione integrale (1), sarà, per una ben nota formola di Hilbert,

$$a_n \Gamma(xy\lambda) + \frac{1}{\lambda} a_{n-1} \{ \Gamma(xy\lambda) - \lambda K_1 \} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^{n-1}} a_1 \{ \Gamma(xy\lambda) - \lambda K_1 - \dots - \lambda^{n-1} K_{n-1} \} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^n} a_0 \{ \Gamma(xy\lambda) - \lambda K_1 - \dots - \lambda^n K_n \} = 0:$$

cioè

$$\Gamma(xy\lambda) = \frac{\lambda K_1(a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^{n-1} a_{n-1}) + \dots + \lambda^{n-1} K_{n-1}(a_0 + a_1 \lambda) + a_0 \lambda^n K_n}{a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^n a_n}.$$

Resta così posto in evidenza che i valori di λ (valori eccezionali) pei quali $\Gamma(xy\lambda)$ diviene infinito, non possono essere più di n . D'altra parte, se è soddisfatta la condizione (α), il loro numero non può essere inferiore ad n , perchè, in tal caso, le funzioni

$$K_1(xy), K_2(xy), \dots, K_n(xy)$$

nel campo S risulterebbero legate linearmente, e non potrebbe essere soddisfatta la condizione in questione.

Tal numero sarà dunque precisamente $= n$. D'altra parte, da quanto precedentemente abbiamo visto, risulta che se il numero dei valori eccezionali del nucleo simmetrico elementare $K(xy)$ dell'equazione integrale (1) è $= n$, il numero X delle sue funzioni eccezionali linearmente indipendenti risulterà determinato dall'equazione di 1° grado:

$$\begin{vmatrix} X & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ . & . & . & . \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

Se dunque la funzione $K(xy)$, oltre che alle condizioni (α) (β), soddisfarà anche alla condizione (γ), certamente sarà $X = m$ ed essa sarà rappresentabile in tutto il campo S nella forma (I). Resta così dimostrato che le condizioni enunciate sono anche sufficienti.

Fisica matematica. — *Sulle vibrazioni luminose di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso.* Nota di A. SIGNORINI, pres. dal Socio MAGGI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nella mia Nota recante il titolo: *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali del secondo ordine*, apparsa nell'ultimo fascicolo di questi Rendiconti, ho dato un teorema di confronto per le equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali del second'ordine, che è perfettamente l'analogo del classico teorema di confronto di Sturm per le equazioni lineari differenziali ordinarie del second'ordine. Mi permetto ora di osservare, secondo quanto ho annunciato al n. 1 della Nota indicata, alcune notevoli immediate conseguenze del detto teorema di confronto, concernenti la determinabilità dell'integrale di una equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine, mediante i valori dell'integrale assegnati lungo un contorno chiuso limitante un campo connesso.

Citerò colla notazione (N) la menzionata mia Nota.

2. Consideriamo la più generale equazione ellittica autoaggiunta del second'ordine:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \theta(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + t(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ t(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \tau(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + A(x, y) u = 0,$$

per la quale $\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \tau, \frac{\partial \tau}{\partial y}, t, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}$ sono funzioni finite e continue in un campo C nel quale supponiamo (come sempre possiamo) θ (e quindi τ) maggiore di una quantità positiva.

Diciamo M il massimo di $A(x, y)$ in C. Se è $M \leq 0$, assegnato in C un qualunque contorno chiuso γ (della specie ordinariamente considerata nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche) si sa che esiste

ed è unico l'integrale della (1) assoggettato a prendere su γ valori prescritti ⁽¹⁾.

Domandiamo ora, se è $M > 0$, per quali contorni γ in C si può, considerando soltanto la determinabilità dell'integrale, asserire la medesima cosa? o. il che fa lo stesso, per quali contorni γ in C non esiste che la soluzione $u \equiv 0$ nulla su di esso?

La questione, che ci proponiamo, ammette infinite soluzioni. Una soluzione che subito si presenta si ha affermando:

Se p designa quel numero positivo (certamente esistente e ben determinato) per il quale è in C

$$\theta(x, y) \geq p, \quad \theta(x, y) - p \leq \tau(x, y) - p \leq -t(x, y) \geq 0,$$

per ogni contorno γ intieramente contenuto in una striscia di C di larghezza minore di $\pi \sqrt{\frac{p}{M}}$, una soluzione della (1) nulla su γ è identicamente nulla ⁽²⁾.

Difatti, ammessa l'esistenza di una soluzione della (1) nulla su un contorno γ di tal fatta e non identicamente nulla, dal confronto della (1) coll'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Mu = 0$$

si deduce, secondo il teorema al n. 2 di (N), che una qualunque soluzione della (2) si annulla nell'interno di una striscia di larghezza eguale a $\pi \sqrt{\frac{p}{M}}$.

⁽¹⁾ Nella nota 3 di (N) ho infatti osservato come, nel caso $M \leq 0$, non possa esistere che un solo integrale della (1) assoggettato a prendere su un contorno γ in C valori assegnati, ora l'equazione (1), supposta una certa derivabilità nei coefficienti, appartiene a quella classe di equazioni nella quale, sotto certe ipotesi pel contorno su cui sono dati i valori dell'integrale, i teoremi di esistenza e di unicità valgono sempre insieme. Cfr. E. E. Levi, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*. Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3^a, tomo XVI.

⁽²⁾ Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, pag. 25 e seg. Ivi è stabilito, per via affatto diversa, un risultato analogo a quello ora enunciato nel testo, ma di diverso significato. Si potrà paragonare il nostro risultato con quello di Picard nel solo caso che sia $\theta = \tau$, $t = 0$, ed esistano le derivate $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$. Fatte queste ipotesi il numero da noi indicato con $\frac{M}{p}$ coinciderà con quello dal Picard indicato con m^2 , nel solo caso che le funzioni

$$\frac{A}{\theta} \quad \text{o} \quad \frac{A}{\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \log \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log \theta}{\partial y^2} \right),$$

abbiano in C lo stesso massimo. Cfr. anche Lichtenstein, *Zur Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVIII, pag. 302 e seg. Quivi trovansi altre utili note bibliografiche.

Questa conclusione è assurda, poichè, se

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + a = 0$$

è l'equazione di una delle rette limitanti la striscia. l'equazione dell'altra sarà

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + a + p \sqrt{\frac{\pi}{M}} = 0,$$

e la soluzione della (2):

$$u = \sin \left\{ \sqrt{\frac{M}{p}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha + a) \right\},$$

nulla sulle due rette, non è mai nulla nell'interno della striscia ⁽¹⁾.

3. Ma, sempre mediante il confronto dell'equazione (1) coll'equazione (2), si può rispondere in infiniti altri modi alla questione proposta. Basterà determinare dei campi Γ di C pei quali si possa assicurare l'esistenza di un integrale della (2) che ivi non si annulli mai; si potrà allora dire che una soluzione della (1) nulla su un contorno γ tutto contenuto in un campo Γ è identicamente nulla.

Un altro campo Γ , non sempre contenuto in una striscia di larghezza minore di $\pi \sqrt{\frac{p}{M}}$, che subito si presenta è un qualunque quadrato di C di lato minore di $\pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{M}}$. Infatti la soluzione della (2):

$$u = \sin \left(\sqrt{\frac{M}{2p}} \{ (x-a) \cos \alpha - (y-b) \sin \alpha \} \right) \\ \times \sin \left(\sqrt{\frac{M}{2p}} \{ (x-a) \sin \alpha + (y-b) \cos \alpha \} \right),$$

dove α, a, b significano costanti arbitrarie, è nulla sul contorno, e non mai nulla nell'interno, del quadrato limitato dalle rette

$$(x-a) \cos \alpha - (y-b) \sin \alpha = 0, \\ (x-a) \cos \alpha - (y-b) \sin \alpha = \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{M}}, \\ (x-a) \sin \alpha + (y-b) \cos \alpha = 0, \\ (x-a) \sin \alpha + (y-b) \cos \alpha = \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{M}},$$

⁽¹⁾ La proprietà osservata nella nota 3 di (N) risulta anche dal confronto delle due equazioni (1) e (2) del testo, poichè se è $M \leq 0$, esiste una soluzione della (2) che non è mai nulla, essa è

$$e^{\sqrt{-\frac{M}{p}}}$$

che è appunto (per l'arbitrarietà delle α, a, b) un qualunque quadrato di lato $\pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{M}}$. Possiamo dunque dire:

Una soluzione delle (1) nulla su un contorno γ tutto interno ad un quadrato di lato $\pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{M}}$ è identicamente nulla.

4. Per determinare nuovi campi Γ nei quali si possa assicurare l'esistenza di una soluzione della (2) non mai nulla, operiamo il cambiamento di variabili espresso da

$$(3) \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

supponendo che i punti singolari della trasformazione, cioè i punti in cui si annulla

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$$

siano fuori del campo C. Col cambiamento di variabili (3) si abbia

$$dx^2 + dy^2 = e d\xi^2 + 2f d\xi d\eta + g d\eta^2,$$

sarà

$$eg - f^2 = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right)^2$$

e quindi in C

$$e > 0, g > 0, \quad eg - f^2 > 0.$$

Nelle variabili ξ e η l'equazione (2) si scrive:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial u}{\partial \xi} - f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(e \frac{\partial u}{\partial \eta} - f \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{M}{p} \sqrt{eg - f^2} u = 0.$$

Quando l'equazione (4) potrà essere soddisfatta da una funzione u dipendente dalla sola ξ ? Occorrerà perciò che per mezzo di una funzione $X(\xi)$ della sola ξ sia possibile soddisfare all'equazione

$$(5) \quad \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{\sqrt{eg - f^2}}{g} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{g}{\sqrt{eg - f^2}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{f}{\sqrt{eg - f^2}} \right) \frac{dX}{d\xi} + \frac{M}{p} \frac{eg - f^2}{g} X = 0,$$

per la qual cosa basterà ammettere, come appunto intendiamo di fare, che si abbia

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{eg-f^2}}{g} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{g}{\sqrt{eg-f^2}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{f}{\sqrt{eg-f^2}} \right) = a_1(\xi), \\ \frac{eg-f^2}{g} = a_2(\xi), \end{array} \right.$$

$a_1(\xi)$ e $a_2(\xi)$ indicando due funzioni della sola ξ . Ammettiamo dunque che il cambiamento di variabili (3) sia tale che risultino verificate le (6). Le (6) saranno verificate per tutti quei sistemi di coordinate ortogonali ξ, η pei quali e risulterà funzione della sola ξ , e g il prodotto di una funzione della sola ξ per una funzione della sola η . A tali sistemi di coordinate nel piano appartiene il sistema di coordinate polari (coll'origine fuori del campo C). L'equazione (5) può scriversi

$$(7) \quad \frac{d}{d\xi} \left\{ e^{\int a_1(\xi) d\xi} \frac{dX}{d\xi} \right\} + \frac{M}{p} a_2(\xi) e^{\int a_1(\xi) d\xi} X = 0,$$

diciamo N il massimo in C di $a_2(\xi) e^{\int a_1(\xi) d\xi}$ e q il minimo di $e^{\int a_1(\xi) d\xi}$, è noto che, dicendo (α, β) il tratto dell'asse ξ in cui è contenuto ξ pei punti di C, per ogni segmento, del tratto (α, β) dell'asse ξ , di ampiezza δ minore di

$$\Delta = \pi \sqrt{\frac{p}{M}} \sqrt{\frac{q}{N}},$$

esiste una soluzione della (7) che ivi non s'annulla mai. Se dunque consideriamo nel piano x, y la regione di C limitata dalle due curve

$$\xi(x, y) = c \quad , \quad \xi(x, y) = c + \delta,$$

c indicando una qualunque costante di (α, β) , essa è un campo Γ . Possiamo cioè dire:

Una soluzione della (1) nulla sopra un contorno γ limitante un campo tutto contenuto in una regione di C limitata dalle due curve

$$\xi(x, y) = c \quad , \quad \xi(x, y) = c + \delta,$$

è identicamente nulla.

5. Consideriamo, in particolare, il caso che le coordinate ξ e η siano coordinate polari e sia $\xi = \rho$, $\eta = \theta$. L'equazione (5) coinciderà allora con l'equazione

$$(8) \quad \frac{d^2 X}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dX}{d\rho} + \frac{M}{p} X = 0,$$

a cui soddisfa la funzione di Bessel d'ordine zero in $\sqrt{\frac{M}{p}} \rho$. Il punto sin-

golare del cambiamento di variabili

$$x = \varrho \cos \theta \quad , \quad y = \varrho \sin \theta$$

è rappresentato da $\varrho = 0$, dovremo perciò supporre il campo C tutto esterno ad un certo cerchio di centro nell'origine e di raggio r . Sia d'altra parte $r + h$ il raggio del cerchio di centro nell'origine che contiene nel suo interno il campo C, i numeri q e N saranno rispettivamente r e $r + h$. Ne seguirà che in una corona circolare di C di larghezza δ minore di

$$\Delta = \pi \sqrt{\frac{p}{M}} \sqrt{\frac{r}{r+h}},$$

nella quale il raggio minore non è inferiore a r e il maggiore non superiore a $r + h$, esiste una soluzione della (2) non mai nulla.

Si vede che, per un fissato ma arbitrario valore di h , al crescere di r all'infinito, il limite superiore Δ della larghezza delle considerate corone circolari tende a $\pi \sqrt{\frac{p}{M}}$, cioè (n. 2) al limite superiore della larghezza delle striscie godenti della medesima loro proprietà.

Un valore di Δ , indipendente dalla quantità h , che crediamo utile rilevare, è quello che segue dalla considerazione degli zeri di $\sqrt{\varrho} Y(\varrho)$ per $\varrho \geq r$, $Y(\varrho)$ indicando un qualunque integrale dell'equazione

$$(9) \quad Y''(\varrho) + \frac{Y'(\varrho)}{\varrho} + Y(\varrho) = 0.$$

Si ha per $\sqrt{\varrho} Y(\varrho)$ l'equazione

$$(10) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \sqrt{\varrho} Y(\varrho) \right\} + \left(1 + \frac{1}{4\varrho^2} \right) \sqrt{\varrho} Y(\varrho) = 0,$$

per cui, per l'ordinario teorema di confronto di Sturm, si può affermare (com'è noto) che in ogni intervallo dell'asse positivo ϱ di ampiezza π cade una radice almeno di $\sqrt{\varrho} Y(\varrho)$ e che, per $\varrho \geq r$, per ogni intervallo di ampiezza minore di

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}},$$

esiste una soluzione della (10), e quindi della (9), ivi non mai nulla.

Ne segue, qualunque sia il numero positivo r , che per ogni intervallo dell'asse ϱ , a destra di r , di ampiezza δ minore di

$$\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}} \sqrt{\frac{p}{M}},$$

esiste una soluzione della (8) ivi non mai nulla, e quindi:

Per ogni contorno γ limitante un campo intieramente contenuto in una corona circolare di C avente il raggio minore non inferiore a r , e di larghezza δ inferiore a

$$\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}} \sqrt{\frac{p}{M}},$$

una soluzione della (1) nulla su di esso è identicamente nulla.

Per cui, per esempio, i valori di un integrale della (1) assegnati su due contorni γ e γ' limitanti un campo semplicemente connesso tutto contenuto in una corona circolare di raggio minore $\geq r$, e di larghezza $\leq \delta$, determinano sempre perfettamente l'integrale, ecc.

Considerando poi che è $J(0) = 1$, $J(x)$ designando la funzione di Bessel d'ordine zero, e che le radici di $J(x)$, più piccole in valore assoluto, sono α e $-\alpha$ con $\alpha = 2,4048 \dots$ ⁽¹⁾, si può dire:

Una soluzione della (1) nulla su un contorno contenuto intieramente in un cerchio di raggio

$$2,4048 \sqrt{\frac{p}{M}}$$

è identicamente nulla.

Questo risultato non rientra in nessuno di quelli dati precedentemente, poichè un cerchio del raggio anzidetto non è contenuto in una striscia di larghezza minore di $\pi \sqrt{\frac{p}{M}}$, nè in un quadrato di lato minore di $\pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{M}}$, ecc.

6. Osserviamo che infinite altre risposte alla questione proposta al n. 2 si potrebbero trovare confrontando l'equazione (1) con un'equazione che sia con essa nelle medesime relazioni in cui la (2) di (N) è colla (1) di (N) e che possenga un integrale per il quale si possono determinare i campi in cui si mantiene diverso da zero: per ciascuno di questi campi varrà il teorema d'unicità relativo agli integrali della (1) che prendono valori prescritti su un contorno limitante una regione in esso intieramente contenuta.

7. È ovvio che i teoremi stabiliti in questa e nella precedente Nota si estendono subito alle equazioni ellittiche autoaggiunte del second'ordine in un numero qualunque di variabili:

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Au = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

⁽¹⁾ Secondo la tavola di Hansen.

poichè il processo adottato al n. 2 di (N) vale inalterato per dimostrare il teorema:

Se le forme quadratiche

$$\sum_{i,k} a_{ik} X_i X_k, \quad \sum_{i,k} b_{ik} X_i X_k \quad (a_{ik} = a_{ki}, b_{ik} = b_{ki}),$$

sono entrambe definite positive per qualunque sistema di valori delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n in un campo connesso e finito C di contorno c, mentre pei medesimi sistemi di valori delle variabili la forma

$$\sum_{i,k} (a_{ik} - b_{ik}) X_i X_k$$

è definita o semidefinita positiva ed e

$$B \geq A.$$

se esiste una soluzione u della (11) identicamente nulla su c, non potrà esistere una soluzione v della

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n b_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu = 0,$$

per la quale il rapporto $\frac{u}{v}$ non sia costante in C e ivi si conservi finito.

Meccanica. — *Sul moto traslatorio d'un solido di rivoluzione in un liquido viscoso.* Nota di E. ZONDADARI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

È noto che le equazioni generali del moto di un liquido viscoso sono

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta^2 w \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Se però supponiamo il moto *lento*, cioè se le componenti di velocità u, v, w e le loro derivate rispetto alle coordinate sono così piccole da po-

tersi trascurare i prodotti delle une per le altre, le (1) divengono

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta^2 w. \end{cases}$$

Vogliamo ora studiare ⁽¹⁾ il moto indotto in un liquido viscoso indefinito dal movimento traslatorio di un solido di rivoluzione qualunque, dotato di velocità $V(t)$ nella direzione del proprio asse di rivoluzione. Supponiamo la velocità $V(t)$ tale che il moto indotto nel liquido abbia il carattere di moto lento. Le (3) sono riferite ad assi fissi; ma è facile riconoscere che esse conservano la stessa forma anche se le intendiamo riferite ad assi mobili paralleli ai fissi e legati invariabilmente al solido di rivoluzione che chiameremo ancora Ox, Oy, Oz ; se scegliamo infatti l'asse di rivoluzione come asse Oz e immaginiamo insieme alla terna d'assi mobili Ox, Oy, Oz una terna d'assi fissi coll'origine sopra Oz e paralleli ad Ox, Oy, Oz rispettivamente, abbiamo, indicando con ζ la distanza variabile dell'origine mobile O dall'origine degli assi fissi,

$$w = f(x, y, z + \zeta, t)$$

e quindi

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} V(t);$$

ma l'ultimo termine deve trascurarsi per l'approssimazione considerata nell'ipotesi del moto lento e perciò appunto si può scrivere

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t};$$

le equazioni (3) conservano dunque la stessa forma sia riferite agli assi fissi che agli assi mobili.

Ciò premesso, se trasformiamo le (3) in coordinate cilindriche r, φ, z si ottiene (Basset, *Treatise on Hydrodynamics*, vol. II)

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\Delta^2 R - \frac{R}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\Delta^2 \Phi - \frac{\Phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta^2 Z, \end{cases}$$

⁽¹⁾ Espongo in questa Nota, i risultati ottenuti nelle ricerche che formano la prima parte della mia Tesi di Laurea (Roma, ottobre 1909). Sullo stesso argomento è comparsa recentemente nel tomo XXXVIII del « Bulletin de la Société Mathématique de France », una Nota del prof. L. Zoretti, nella quale però possono rilevarsi alcuni errori di stampa.

in cui R, Φ, Z sono le componenti di velocità secondo gli assi curvilinei in un punto.

Supponiamo ora che il moto del liquido avvenga sempre in piani passanti per l'asse Oz e sia lo stesso in tutti i piani. Allora essendo $\Phi = 0$ e le altre quantità che figurano nelle (4) indipendenti da φ , le (4) stesse divengono

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + r \left(A^2 R - \frac{R}{r^2} \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + r A^2 Z, \end{cases}$$

ove

$$(6) \quad A^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

alle (5) si deve aggiungere la

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial r} (rR) + \frac{\partial}{\partial z} (rZ) = 0$$

ottenuta dalla (2), nell'ipotesi della simmetria rispetto ad Oz .

Delle tre componenti della rotazione di una particella liquida espresse in coordinate cilindriche da

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\Phi)}{\partial z} \right) \\ \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r} \right) \\ \omega_3 = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial (r\Phi)}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right), \end{cases}$$

ω_1 e ω_3 si annullano nel nostro caso: rimane solo ω_2 che chiameremo semplicemente Ω e potremo scrivere

$$(8) \quad \Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r} \right).$$

Dalle (5) eliminando $U - \frac{p}{\rho}$ si ottiene

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r} \right) = r \left(\frac{\partial}{\partial z} A^2 R - \frac{\partial}{\partial r} A^2 Z - \frac{1}{r^2} \frac{\partial R}{\partial z} \right);$$

ma per la (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A^2 R &= A^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} A^2 Z &= A^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial Z}{\partial r}, \end{aligned}$$

e poichè

$$A^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) - A^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial r} \right) = A^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r} \right)$$

la (9) diviene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r} \right) = v \left\{ A^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r} \right) \right\},$$

cioè, per la (8)

$$(10) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = v \left(A^2 \Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right),$$

equazione a cui deve soddisfare la rotazione Ω .

All'equazione (7) si soddisfa identicamente, com'è noto, ponendo

$$(11) \quad R = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad Z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Se sostituiamo questi valori di R e Z nella (8) si ha

$$(12) \quad \Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right);$$

sostituendo inoltre nelle (5) i valori di R e Z dati dalle (11) ed eliminando fra le (5) stesse la quantità $U - \frac{p}{\rho}$, oppure sostituendo il valore di Ω dato dalla (12) nella (10) si giunge all'equazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t} = \\ = v \left(\frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) \end{aligned}$$

alla quale deve soddisfare la ψ .

Le condizioni ai limiti si ottengono, supposto che il liquido aderisca completamente alla superficie del solido, esprimendo analiticamente il fatto che le particelle liquide a contatto della superficie del solido sono dotate della stessa velocità dei punti di essa. Supponendo, inoltre, che il solido sia tutto a distanza finita, si dovrà aggiungere la condizione che il liquido resti in quiete all'infinito.

Indicando dunque con σ la superficie del solido, con R_σ, Z_σ e R_∞, Z_∞ le componenti della velocità sulla superficie σ e all'infinito rispettivamente, si avranno le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} R_\sigma &= 0 & Z_\sigma &= V(t) \\ R_\infty &= 0 & Z_\infty &= 0, \end{aligned}$$

cioè

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{\sigma} = 0 & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{\sigma} = V(t) \\ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{\infty} = 0 & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{\infty} = 0 \end{array} \right.$$

alle quali si deve aggiungere la condizione

$$[\psi]_{t=0} = \psi_0(r, z)$$

relativa allo stato iniziale, dove $\psi_0(r, z)$ è una funzione arbitraria nota, soddisfacente sopra σ e all'infinito alle stesse condizioni (13) a cui deve soddisfare la ψ .

Matematica. — *Sopra l'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. EVANS, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

Matematica. — *Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio.* Nota di M. PANNELLI, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

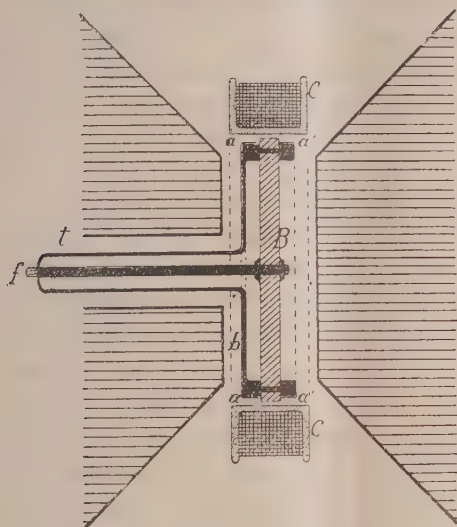
Matematica. — *Sur les transformations de contact spéciales et le théorème de Jacobi.* Nota di TH. DE DONDER, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Azione elettro-magnetica degli ioni dei metalli, deviati dalla traiettoria normale per effetto di un campo magnetico.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Un disco circolare di bismuto B può essere percorso radialmente da una corrente continua; la quale penetra dal centro, per un filo f che lo traversa e vi è fissato con due piccoli dadi, e viene raccolta alla periferia da due anellini di rame a, a' applicati all'orlo delle due facce del disco. Da uno degli anelli la corrente ritorna radialmente lungo una piastrina forata di rame parallela al disco, fino a un tubo t che s'innesta nel foro e circonda il filo centrale. Una bobina piatta CC con le spire parallele al disco, lo circonda tutto in giro ed è rilegata a un galvanometro.

Disco e bobina sono disposti tra i poli d'un elettro-magnete Weiss, normalmente alle linee di forza. A tal fine il tubo circondante il filo centrale passa pel canale del nucleo dell'elettro-magnete e pel foro d'una delle masse polari, l'altra massa polare è cieca; entrambe hanno le facce piane d'estensione quasi eguale alla parte scoperta del disco in bismuto. Quando l'elettro-magnete non è eccitato, il passaggio della corrente radiale non crea alcuna azione magnetica nella bobina che circonda il disco; e perciò il galvanometro non dà alcuna deviazione qualora si stabilisca o s'interrompa la corrente radiale medesima. Se però si eccita il campo (interrompendo durante la ma-



novra il circuito della bobina e del galvanometro) e si stabilisce, a campo eccitato, la corrente nel disco, si nota al galvanometro una deviazione brusca, come per una corrente indotta. Tornato il galvanometro a zero e interrompendo la corrente nel disco, si ha una deviazione eguale ed opposta. Il senso delle deviazioni ottenute s'inverte col senso della corrente nel disco, come anche col senso della corrente nell'elettro-magnete; e la corrente indotta si annulla quando si sostituisce al disco di bismuto un disco di rame.

È perciò escluso che si tratti di azioni dovute ad azione mutua dei circuiti, o a lievi correnti derivate, o a variazioni delle proprietà magnetiche del bismuto pel passaggio della corrente; naturalmente occorre provvedere a che le due correnti che circolano nell'elettro-magnete e nel disco siano completamente indipendenti.

Il fenomeno ha una interpretazione molto semplice, che mi servì appunto di guida nel prevederne l'esistenza.

Come è noto, nel bismuto la corrente elettrica è trasportata da ioni positivi e negativi, che si muovono in senso opposto con grande prevalenza

della corrente negativa. Nel caso del disco gli ioni che si muovono, a campo non eccitato, radialmente, subiranno un'azione deviatrice quando si eccita il campo, assumendo un moto spirale che si compirà nel *medesimo verso* tanto pei positivi che pei negativi. Ma poichè le due correnti e le velocità degli ioni loro velocità sono disuguali, malgrado la rotazione abbia luogo nel medesimo verso, si desterà un vero campo magnetico, del quale la bobina esterna rivela la creazione e la fine, alla chiusura e all'apertura della corrente nel disco.

Una interpretazione del medesimo genere vale, com'è noto, pel fenomeno di Hall: dal quale tuttavia il fenomeno descritto in questa Nota si differenzia notevolmente; specie in ciò che nell'esperienza di Hall le linee di corrente conservano alla chiusura del campo l'andamento rettilineo normale, e non si altera quindi la loro azione magnetica, mentre si modifica la distribuzione dei potenziali, il che è rivelato dalle sonde rilate al galvanometro. Invece nel mio caso vengon distorte le linee di corrente, con la conseguente creazione d'un effetto induttivo, ma rimane inalterata la distribuzione dei potenziali, cosicchè derivando un galvanometro tra due punti inizialmente allo stesso potenziale, esso non darebbe alcuna deviazione alla chiusura del campo: manca perciò il fenomeno di Hall propriamente detto.

In queste esperienze preliminari la parte attiva del disco aveva il diametro di 60 mm. e lo spessore di 2.5 mm. L'azione elettromagnetica risultò proporzionale alla corrente che traversava il disco; e crescente con l'intensità del campo, ma molto più lentamente del campo medesimo.

Con un campo di circa 1000 unità e una corrente nel disco di 20 ampère, le deviazioni ottenute corrispondevano all'azione induttiva esercitata sulla stessa bobina, da una spira, dello stesso contorno del disco, messa al suo posto nell'interferro, e percorsa dalla corrente di 0.2 ampère. Il senso delle deviazioni fu sempre conforme alla regola seguente: *Il passaggio d'una corrente centrifuga nel disco, sotto l'azione del campo, lo trasforma in una lamina magnetica col medesimo senso di circuitazione della corrente magnetizzante; se la corrente è centripeta, il senso di circuitazione della lamina magnetica equivalente al disco è opposto a quello della corrente magnetizzante.*

Prevale adunque l'azione magnetica esercitata dalla corrente distorta negativa. In una successiva Comunicazione sarà esposta la teoria di questo fenomeno, e la sua connessione coi fenomeni galvanomagnetici già noti; e sarà mostrato che esso dipende in modo diverso dalle costanti di Drude relative al metallo, ed è determinato da un numero minore di queste.

Fisica. — *Su alcuni nuovi modi di preparare soluzioni di Selenio colloidale.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

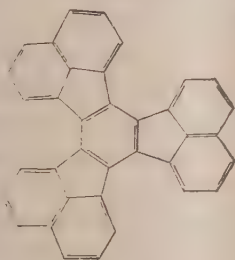
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul decaciclene e sulla sua pretesa proprietà di sciogliere la grafite.* Nota di M. PADOA ⁽¹⁾, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Nel 1907 comparve nel *Journal für praktische Chemie* una Nota di Ivan Ostromysslensky ⁽²⁾ in cui da alcune esperienze si deduceva come probabile il potere solvente della grafite per parte di un idrocarburo polinucleare, il *decaciclene*.

L'autore citato aveva provato a sciogliere la grafite in vari idrocarburi complessi a catene chiuse, basando il suo ragionamento sul fatto che si sciolgono scambievolmente a preferenza quei corpi che hanno costituzione chimica analoga.

Ora, ammettendo pel carbonio una struttura policiclica, come si ammette considerando che per ossidazione con permanganato la grafite dà acido mellitico, riusciva assai accetta l'idea che un solvente pel carbonio potesse essere un idrocarburo come il decaciclene, che è il meno ricco d'idrogeno (ne contiene il 4 %, cioè meno dell'antracite) ed ha la struttura seguente



come si sa dal fatto che si ottiene ossidando con zolfo l'acenaftene e che dà acido mellitico se viene ossidato con acido nitrico in presenza di sali di mercurio.

Ciò che impedì ad Ostromysslensky di fare osservazioni più precise, fu la mancanza di un buon metodo per preparare il decaciclene. Convinto della importanza che avrebbe avuto il potere assodare l'esistenza di tali rapporti di solubilità, che forse avrebbero resa possibile la determinazione del peso molecolare del carbonio, cercai dapprima un metodo più conveniente di quelli noti per la preparazione del decaciclene, poi tentai di sciogliervi varie

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

⁽²⁾ *Journal für praktische Chemie* (2) 76, 268-273.

qualità di grafite; purtroppo, come dirò meglio in seguito, questa seconda parte ebbe esito negativo. Tuttavia rendo note queste esperienze perchè con esse si dà un metodo buono di preparazione del decaciclene (che è pur sempre un idrocarburo assai interessante) e di cui forse l'Ostromyslensky potrà profittare per tentar di sciogliere qualche qualità di grafite russa che non è alla nostra portata.

1. La preparazione del decaciclene, come è descritta da Dziewonski ⁽¹⁾ [analogamente opera anche Behländer ⁽²⁾] consiste nel far reagire in un pallone gr. 23 di zolfo e gr. 100 di acenaftene, riscaldando fino a 290° circa. Il prodotto, che contiene anche grande quantità di dinaftiltiofene, viene estratto più volte con alcool e benzolo e cristallizzato dal nitrobenzolo o dall'anilina.

Operando così non siamo mai riusciti ad avere più di 2 grammi di decaciclene puro per ogni 100 grammi di acenaftene impiegato, senza contare le lunghissime operazioni di estrazione. Risultati un po' migliori, ma non uniformi, si ottennero adoperando soltanto 25 grammi di acenaftene per volta, e zolfo in proporzione.

Per fortuna una semplicissima modificazione ci condusse a buoni risultati: basta operare in tubi chiusi. Dopo alcuni tentativi si vide che il miglior procedimento consiste nel riscaldare gr. 4 di zolfo e gr. 17 di acenaftene in tubo chiuso per due ore a 200°; poi si sfiatano i tubi dall'idrogeno solforato (cautamente, perchè se ne forma tanto che lo si vede liquefatto nell'interno del tubo) e si riscaldano di nuovo per circa un'ora a 250°. Dopo ciò il contenuto dei tubi si estrae per 4 o 5 volte con toluolo bollente per eliminare il poco acenaftene inalterato ed il dinaftiltiofene; finalmente si cristallizza dal nitrobenzolo, facendo uso di carbone animale; le filtrazioni vengono fatte a caldo, e per evitare inconvenienti è necessario far uso di un imbuto a doppia parete che contenga olio bollente. Con tale procedimento si ottengono circa 12 grammi di decaciclene purissimo per ogni 100 grammi di acenaftene.

In queste preparazioni fui coadiuvato dal laureando sig. Vito Foligno.

2. Preparammo così circa 50 grammi di decaciclene purissimo; si trattava ora di determinare con precisione il punto di fusione, che dagli altri autori si sapeva giacere verso i 400°; poi di fare, se la buona sorte lo permetteva, delle esperienze crioscopiche, impiegando il carbone come corpo sciolto. Anzitutto, per ottenere una temperatura così elevata e costante, costruimmo una piccola stufa elettrica costituita da un tubo di porcellana chiuso inferiormente, circondato dagli avvolgimenti metallici e da parecchi rivestimenti in amianto; con tale dispositivo si poteva salire fino a 600° facendo uso della corrente alternata stradale a 110 volts. Ci servimmo di

⁽¹⁾ Berichte 36, 962.

⁽²⁾ Ibid., 1583.

un termometro in vetro di Boemia delle Vereinigte Fabriken für Laboratoriumsbedarf, che può andare fino a 575° , e dotato delle debite correzioni.

Il decaciclene veniva posto in una provetta di vetro infusibile; il bulbo del termometro non veniva immerso direttamente (per evitare rotture al congelamento della massa), ma col tramite di una guaina, che serviva anche a condurre nella provetta una corrente di anidride carbonica; fra il bulbo e la guaina si poneva una polvere metallica molto conduttrice. Si faceva fondere il decaciclene portando la temperatura a 425° circa, poi si faceva raffreddare lentamente seguendo l'andamento del termometro col tempo. Delle curve di raffreddamento ottenute, parecchie denotavano un sopraraffreddamento di circa mezzo grado e indicavano chiaramente il punto di fusione, che si può ritenere assai vicino a $389^{\circ} 5$. Per tentare la soluzione della grafite, ce ne provvedemmo di varie qualità: bavarese, in blocchi neri opachi e friabili; di Ceylan, in lamelle lucenti e untuosa al tatto; siberiana, dura e opaca; questi campioni ci furono mandati dalla casa C. A. F. Kahlbaum.

In una prima esperienza si impiegarono gr. 0,364 di grafite siberiana e 6 gr. di decaciclene, riscaldando per un'ora circa a 500° (analogamente a quanto fece Ostromysslensky). Facendo raffreddare, non si poté osservare la solita deviazione della curva indicante il punto di congelamento. Evidentemente il decaciclene si era scomposto, come potemmo accertare dopo, estraendo la massa con varî solventi; potemmo ancora recuperare la grafite intatta: il suo peso era cresciuto di gr. 0,017.

Pensammo di ripetere la fusione mantenendo più bassa la temperatura, per evitare alterazioni; riscaldammo per un'ora a 430° . In queste condizioni, con tutte e tre le qualità di grafite, ottenemmo delle curve indicanti il punto di congelamento del decaciclene puro; inoltre la grafite rimaneva completamente inalterata. D'altra parte qualsiasi corrosione si sarebbe resa manifesta specialmente con quella di Ceylan, ma non si poté mai osservare.

Abbiamo tentato poi di determinare la costante crioscopica del decaciclene, che poteva essere interessante per altre esperienze, ma non potemmo trovare sostanze adatte da sciogliervi.

In queste esperienze ebbi il valido aiuto del laureando sig. Umberto Dotta.

Chimica. — *Analisi termica delle miscele di cloruro rameoso con cloruri di elementi monovalenti.* Nota di C. SANDONNINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla sintesi diretta dei gliceridi*. Nota di G. GIANOLI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

I signori I. Bellucci e R. Manzetti hanno comunicato, nella seduta del 22 gennaio p. p., una loro Nota nella quale credettero affermare di essere riusciti per i primi a eterificare completamente gli acidi grassi di elevato peso molecolare, riscaldandoli nel vuoto colla quantità voluta di glicerina. Fecero rilevare, altresì, l'importanza industriale di questo metodo per la preparazione della trioleina mediante l'acido oleico.

Agli autori è sfuggito probabilmente il rapporto che ho presentato per incarico della Società Chimica di Milano, alla Sezione IV-A del VI Congresso di chimica applicata, tenutosi a Roma nel 1906 ⁽¹⁾, sull'industria delle materie grasse in Italia, nel quale ho accennato alle cause della imperfetta eterificazione, quando si procede col metodo indicato da Berthelot ed al sistema da me introdotto nella pratica fino dal 1891, che consiste nell'operare il riscaldamento della miscela di glicerina e acidi grassi in una atmosfera rarefatta, cioè collo stesso espediente di cui si sono valse gli accennati autori. In quell'occasione ho avvertito che i gliceridi, ottenuti direttamente dagli acidi grassi dell'olio al solfuro, presentano una vischiosità maggiore dell'olio di olivo ordinario, e che codesta proprietà riesce vantaggiosa laddove gli oli sono destinati alla lubrificazione. Aggiunsi, inoltre, che la disacidificazione col processo sintetico dell'olio al solfuro ha estese le applicazioni di questo prodotto ed ha migliorate le condizioni di vendita a vantaggio dell'olivicultura.

Posso ora assicurare che vent'anni or sono tale sistema fu attivato in grandi proporzioni e che a quest'ora furono prodotti alcuni milioni di chilogrammi di olio sintetico.

Con ciò credo mi appartenga la priorità del metodo di sintesi dei gliceridi più sopra descritto e delle applicazioni industriali che scaturirono.

Chimica. — *Sulla luminosità del fosforo - Esperienze da lesione*. Nota di L. MARINO e C. PORLEZZA, presentata dal Socio R. NASINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

⁽¹⁾ Atti del VI Congresso internazionale di chimica applicata, vol. III, pag. 51, Roma, 1907.

Chimica. — *Sull'esistenza di un nuovo tipo di biossidi. (Reazione fra acido selenioso e biossido di manganese).* Nota di L. MARINO e V. SQUINTANI, presentata dal Socio R. NASINI.

Chimica. — *Sugli stati amorfi del Silicio.* Nota di L. CAMBI, presentata dal Socio R. NASINI.

Chimica. — *Sui solfuri di silicio.* Nota II di LIVIO CAMBI, presentata dal Socio R. NASINI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Agronomia. — *Le rocce e le acque dell'Agro Romano rispetto alla calce.* Nota di G. DE ANGELIS D'OSSAT, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Più di una volta, come pure occorre ad altri geologi, ho trovato nell'Agro Romano nuclei, concrezioni, croste ecc., più o meno calcaree sottostrati di tufo vulcanico permeabile e sopra un altro relativamente impermeabile. Sotto i non spessi accumoli di *pozzolanelle* e sopra le irregolarità del sottostante tufo litoide si ha la sede o giacimento preferito. I materiali calcarei elaborati nella massa pozzolanica sono trasportati dallo sgocciolamento in basso sino al ristagno delle acque calcarifere nelle irregolarità superficiali del mezzo impermeabile, dove le acque, evaporando nella calda stagione asciutta, depongono il calcare, con argilla, impregnando il materiale vulcanico.

Tra i molti materiali calcarei raccolti in numerose località romane ho prescelto, per lo studio, un campione proveniente dalla via Tiburtina e preso appunto sopra i tufi litoidi e sotto un tenue strato di pozzolanelle e propriamente lungo una doccia scolante di quello (loc. *guinza*). La roccia generalmente presenta colore oscuro, tendente al rossiccio od al giallo-sporco: varia è la compattezza. La massa è infarcita di materiali vulcanici, come: frammenti di lava, scorie, tufi vulcanici e cristalli isolati; fra quest'ultimi predominano i pirosseni e le miche. Il materiale cementante è prevalentemente di natura calcarea: ma non vi manca l'argilla. Questa isolata (metodo per l'argilla tecnica) si mostra colorata intensamente per ossidi di ferro od in

giallo od in rosso: essa trovasi in gran parte allo stato *colloidale*, insieme all'idrossido del ferro.

Al microscopio (v. fig. 6) si riconoscono subito i frammentini irregolari, spesso subrotondi, di lave, scorie e tufi, più o meno alterati ed infarciti da cristalli di leucite spesso ridotti in scheletro a croce o profondamente caolinizzati, con inclusioni ordinate. Le alterazioni subite dagli inclusi hanno occasionato lo sviluppo dei composti del ferro. I frammenti nominati sono riuniti da una massa pur ocracea in cui predomina il calcare minutamente cristallino, frammisto ad argilla ocracea. Dentro questa pasta, porfiramemente disseminati, si osservano inoltre cristalli isolati dei seguenti minerali.

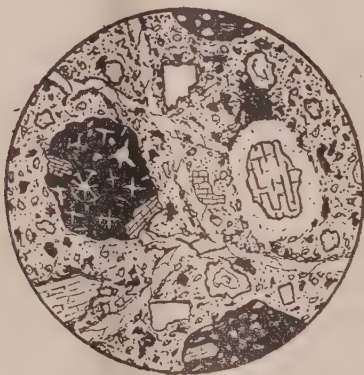


FIG. 6.

Da una fotografia di sezione sottile; a luce ordinaria. Circa $\times 15$.

Per numero predomina la mica oscura, ridotta in sottili ed alterate squamette irregolari di varie dimensioni, più frequentemente piccole. Il colore, a luce ordinaria, è giallo sporco, talvolta oscuro. Alla luce polarizzata si scorgono meglio le alterazioni subite dalla *biotite*.

Segue poi il pirosseno verde, con cristalli idiomorfi di varie dimensioni, con colorazioni e pleocroismo di diversa intensità. I cristalli soventi sono zonati e con angoli di estinzione varianti dall'esterno all'interno. Da tutto ciò e dai valori angolari di estinzione si individualizzano l'*augite-egerina* e l'*augite*.

Finalmente si trovano ben distinti granuli di feldspato. Le sfaldature difficilmente si osservano, come rare sono le geminazioni; quelle polisintetiche non le vidi mai. L'estinzione riportata alle tracce del piano [010] ha dato valori intorno a 30° per modo che parrebbe indicato un plagioclasio basico (Labrador-Bytownite). Tali granuli, somigliando a calcite, si distinguono per la mancanza di tracce di sfaldatura e della frequenza ed evidenza della struttura polisintetica lamellare propria al carbonato di Ca.

Vi sono inoltre altri minerali e fra questi spesseggiano gli oscuri ed opachi, riferibili a composti di ferro.

Le vene sono di calcite ed intersecano, a *stockwerk*, tutta la massa.

Per la petrografia sono interessanti i segni manifesti e profondi del metamorfismo termale subito dalla roccia vulcanica.

La composizione chimica varia di molto specialmente a causa degli inclusi vulcanici e della diversa proporzione fra argilla e calcare. Coll'acido cloridrico ho separato i materiali inclusi e l'argilla dal calcare, ottenendone proporzioni diverse non solo da campione a campione, ma nello stesso esemplare.

Non si devono confondere, per l'analogia origine, i materiali ora descritti con i vasti depositi travertinosi che s'incontrano sopra od ai bordi delle formazioni vulcaniche, specialmente a causa delle diverse proporzioni del fenomeno. Però i fatti di cui si ragiona e la natura delle acque circolanti nei distretti vulcanici, generalmente durissime, illuminano d'intensa luce la genesi della formazione travertinosa.

Donde il dannoso allontanamento della *calce*, già in gran quantità, dalle rocce vulcaniche e dai terreni agrari autoctoni che ne derivano e donde la necessità, come sopra espressi nella legge, di trattenere pure questo indispensabile ingrediente. Inoltre devesi curare che il processo della liberazione della *calce* si svolga con tante moderate fasi da non cambiare la limitata ricchezza della *calce* in soverchia potenza. Per quanto scientificamente poco noti pur si conoscono i mezzi adatti a trattenere gl'ingredienti necessari nel terreno agrario; alludo al potere assorbente, in gran parte purtroppo ancora misterioso.

* * *

Per meglio precisare le circostanze e l'andamento delle evoluzioni del mobile elemento, *calce*, sempre allo scopo di indagarne le utili direttive ed applicazioni, ho sottoposto i campioni ad altri esperimenti.

Primieramente era necessario conoscere, tanto a volume quanto a peso, la *ritenuta* d'acqua o *capacità* idrica delle rocce in esame. A motivo di paragone ho scelto il metodo di Wahnschaffe, col quale si usano cilindri di vetro di volume noto (mm. 40 X 130). Si ottennero, con tutte le cautele del caso, i seguenti dati che pur rappresento in grafiche (Vedi fig. 7 e 8).

	A volume %	A peso %
I	82.71	35.95
II	78.48	34.12
III	75.29	32.73
IV	104.34	45.36

È da notarsi che i campioni dopo una sola ora d'immersione avevano già assorbito quantità d'acqua vistose e subeguali, cioè rispettivamente: I gr. 56.3; II gr. 52.2; III gr. 48.7 e IV gr. 60.3. Trascorse solo sei ore le rocce avevano già assorbito quasi tutta l'acqua di cui erano capaci; infatti l'aumento avvenuto nei giorni successivi, sino a peso costante, si aggirò intorno a pochi gr. 4-7.

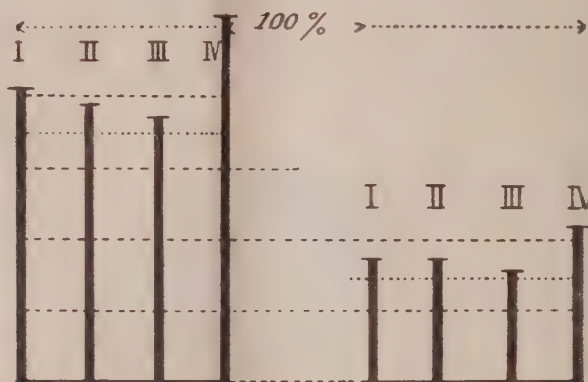


FIG. 7. A Volume.

FIG. 8. A Peso.

I numeri romani indicano i campioni. Equidistanza orizzontale: 5,10 mm.

La velocità relativa di salita dell'acqua nelle rocce fu calcolata profittando degli stessi cilindri del Wahnschaffe, misurando il tempo decorso dall'immersione nell'acqua, sino all'arrivo della stessa alla superficie superiore. I diversissimi valori sono qui riportati e rappresentati (Vedi fig. 9).

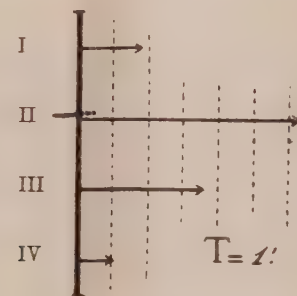


FIG. 9.

I numeri romani indicano i campioni. Equidistanza delle verticali mm. 5.

Velocità media in mm. per minuto primo:

I	mm.	8.66
II	"	32.05
III	"	18.54
IV	"	5.20

Le notevoli velocità di salita mentre da una parte ci assicurano che l'acqua si eleva facilmente e che quindi può smaltirsi o per evaporazione o per la vita vegetale, se presente; dall'altra conferma che molto difficilmente l'acqua, allo stato liquido, possa praticamente penetrare nel seno della terra sino alla circolazione sotterranea.

Le svariate strutture litologiche giustificano i diversi valori della velocità, essendo questi grossolanamente inversi alla piccolezza della grana ed alla quantità del materiale argilloso presente.

* * *

Il fenomeno inverso all'assorbimento dell'acqua non è stato trascurato. L'esperienza è stata eseguita riempiendo di roccia, carica d'acqua sino a completa tenuta, cubi (lato cm. 5) di rete metallica. Questi, così preparati, si esposero a disseccare all'aria e furono pesati sino a peso costante. Nella tabella IV sono riportati i dati di osservazione e le relative perdite percentuali, sia in peso che in volume. Volume circa cm.³ 150.

TABELLA IV.

Numero campioni	Pesi in gr. nei giorni di Dicembre (1910)												Perdita a	
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25		Peso	Volume
I . . .	182.6	173.9	165.5	158.7	152.5	146.0	140.0	137.2	135.2	—	—		47.4 %	59.71 %
II . .	166.9	159.1	150.8	144.1	138.6	132.5	128.8	127.3	126.4	—	—		40.5 "	55.81 "
III . .	188.4	180.5	171.0	163.9	157.6	151.2	146.2	144.0	141.6	—	—		46.8 "	57.13 "
IV . .	176.0	167.0	158.4	150.9	144.9	138.0	132.9	129.4	126.1	125.2	—		50.8 "	66.38 "

Il disseccamento dei campioni è avvenuto con regolarità, con discreta celerità (8 giorni e con $t^{\circ} = 11^{\circ}$ - $15^{\circ},5$ C) e con insignificanti differenze, come appare manifesto dal grafico seguente (Vedi Fig. 10).

* * *

Se si considera la *tenuta* d'acqua per le rocce in esame, per *ha* e per la profondità di m. 0.50, si ottengono le seguenti cifre:

I	m ³	4135.50
II	"	3924.00
III	"	3764.50
IV	"	5217.00

Se le rocce rappresentassero i terreni autoctoni — ciò che nell'Agro si verifica con troppa approssimazione — i numeri indicati rappresenterebbero

esattamente il quantitativo idrico corrispondente ad una completa *irrigazione* (prof. m. 0.50).

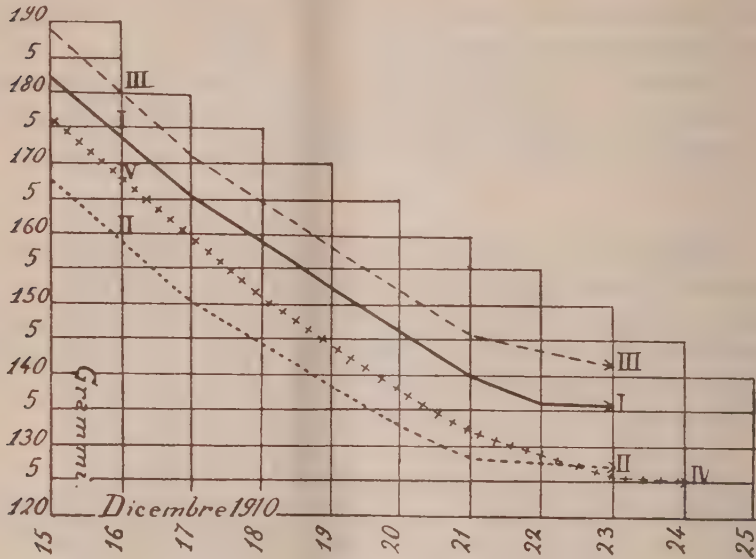


FIG. 10.

I numeri romani corrispondono ai campioni.

Inoltre, conoscendo il valore dell'altezza annuale della pioggia per Roma (mm. 901.8 — Eredia) e supponendo che essa scendesse in una sola ripresa, non è difficile fissare lo strato corrispondente di roccia che ne rimarrebbe saturo, senza sgocciolamento. Esso sarebbe sempre inferiore al metro e particolarmente:

I	m. 0.745
II	" 0.707
III	" 0.678
IV	" 0.940

Laonde nelle località in cui lo strato possiede un maggior spessore si può asserire che punta acqua *praticamente* può scendere a far parte dell'idrografia sotterranea. Di questo importantissimo fatto geologico ed idrologico non si tenne mai conto nè per l'Agro, nè per altre regioni in condizioni analoghe. La deduzione è tirata senza tener conto dello strato di terreno vegetale, dotato sempre di molta capacità idrica. L'osservazione poi ha un controllo diretto nella secchezza relativa delle gallerie scavate nelle rocce sperimentate, quando queste hanno uno spessore maggiore dell'indicated.

Patologia vegetale. — *Sulla batteriosi del pomodoro* (*Bacterium Briosii* n. sp.) (¹). Nota preliminare del dott. G. L. PAVARINO, presentata dal Socio G. BRIOSI.

La batteriosi della quale io intendo parlare, è quella riscontrata nel 1895 in diverse località della Francia dal Prillieux (²), il quale si limitò a riconoscere la natura batterica.

Della stessa malattia si occuparono anche F. S. Earle (³) nel Nord America, ed E. Rostrup (⁴) ha osservato la sua diffusione in Inghilterra e Danimarca come è ricordato nei trattati del Sorauer (⁵) e del Delacroix (⁶). Col nome di marciume dei frutti (*fruit rot*) venne da E. H. Smith (⁷) notata una malattia che sembra corrispondere alla batteriosi e che fu ritenuta come l'effetto di batteri producenti alterazioni consimili a quelle dovute a *Fusarium*.

Anche in Italia, la malattia fu riscontrata dal Ferraris (⁸) in alcuni orti dei dintorni di Alba e fu segnalata dal Voglino (⁹) fin dal 1907 nella provincia di Torino.

Lo scrivente ha potuto accertare che la malattia non è localizzata soltanto sui frutti più o meno deturpati da macchie depresse allargantesi all'apice, ma attacca tutte le parti della pianta e cioè i germogli, i peduncoli florali, i rami ed il fusto.

I germogli ed i ramoscelli si presentano accartocciati e contorti, e sui rami e sul fusto si notano chiazze irregolari brune formanti talvolta strozzature e depressioni allungate secondo la direzione dei solchi naturali della pianta.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto botanico dell'Università di Pavia. Il lavoro per esteso e corredato di tavola illustrativa verrà pubblicato negli Atti dell'Istituto botanico di Pavia.

(²) Prillieux, *Malad. des pl. agr.*, I, 1895, pag. 19.

(³) Earle F. S., *Notes on some tomato diseases in Alabama*. Coll. Stat. Bull., 108, 1896, § 19.

(⁴) Rostrup E., *Plantepatologie*, 1902, S. 173.

(⁵) Sorauer, *Pflanzenkrank.*, 2 Band, 1908, pag. 80, 1909.

(⁶) Delacroix, *Malad. des pl. cultiv.*, p. 48, 1909.

(⁷) Smith E. H., *The blossom end rot of tomatoes*. Massachusetts Agricult. Exper. Station Technical Bull., N. 3, 1907, pag. 19 e fig. 6.

(⁸) Ferraris T., *Trattato di pat. terap. veg.*, Fasc. II, pag. 103, Alba, 1909.

(⁹) Voglino, *Ann. Accad. Agricolt.*, 1909, pag. 277, Torino, 1910.

* *

Nel pomodoro fu osservata un'altra malattia, chiamata pure *batteriosi*, studiata da E. F. Smith ⁽¹⁾ che la ritenne comune ad altre solanacee e dovuta ad un microrganismo che isolò e descrisse col nome di *Bacterium Solanacearum*.

Gli autori sopracitati e cioè il Prillieux, l'Earle ed il Rostrup si limitarono a riconoscere che la malattia era dovuta a bastoncini che misurano da 0,3 a 1 di lunghezza e da 0,5 a 0,65 di larghezza, e che nelle culture formano zooglee assai compatte.

Anche il Voglino dice che si tratta di un parassita molto simile al *Bacterium Solanacearum*.

Invece l'agente patogeno della *batteriosi dei frutti*, da me studiato, è ancora assai poco conosciuto e manca di una determinazione specifica.

In tale stato di cose io ho creduto opportuno riprendere lo studio della malattia, ed intraprendere le culture nei diversi mezzi nutritivi, allo scopo di isolare l'agente patogeno e determinarne con esattezza i caratteri morfologici e culturali.

Come risulta dal confronto seguente, il batterio da me isolato è diverso dal *Bacterium Solanacearum* Smith.

CARATTERI MORFOLOGICI E CULTURALI.

Bacterium Solanacearum Smith.

Batteri ellitici con restringimento, misuranti in certi casi 1,5 per 0,5. *Optimum* per lo sviluppo, 20-30 C.

Colonie formanti intorbidamento alla superficie liquida e talvolta una sottile pseudo-pellicola.

Culture in brodo.

Colonie superficiali distinte che formano scotendo un intorbidamento uniforme con abbondante precipitato bianco sporco. In generale le culture diventano brune.

Gelatina in piatte.

Le colonie superf. sono circolari, poco ispessite, di color bianco splendente e non producono liquefazione della gelatina. Le profonde sono cir-

colari, giallastre o brunastre, a margine ben definito.

Per infissione il microrganismo cresce formando una specie di canale sottile, biancastro, senza causare liquefazione di gelatina per lungo tempo, neanche dopo un mese, a temp. di 20-27 C.

Agar in piatte.

Colonie superf., sono lisce, di color bianco sporco. Le profonde sono irregolarmente rotonde od oblunghe con margine irregolare e di colore bruno o giallo bruno.

Culture a striscio.

Colonie lisce, lucenti, prima bianche o bianco-sporche, poi giallo-sporche ed in fine brune.

⁽¹⁾ Smith E. F., *Bacterial disease of the tomato*. Washington, 1896.

Per infissione si forma un canale con brevi proiezioni alla superf.; la cultura diventa dapprima bianca, poi giallo-sporca ed infine bruna.

Anche l'agar diventa bruno dopo alcune settimane.

Cultura su patate.

Vegetazione abbondante, lucente, prima bianca, poi giallo-sporca e bruna, e in fine quasi nera.

Bacterium n. sp.

Corti e tozzi bastoncini della lunghezza di 2-4 e dello spessore di 0,4-06. *Optimum* temp. ambiente 15-16 C.

Colonie formanti pellicola compatta e persistente.

Colonie che formano pellicola che si distacca coll'agitazione e intorbida il liquido formando un piccolo deposito in fondo alla provetta. Il brodo va colorandosi in giallo.

Le colonie superf., dopo 48 ore mostransi di già sotto forma di punti-

cini giallicci, tondeggianti ed a contorno regolare. Di poi, crescendo, diventano opache ed assumono un colorito giallo-limone ed un contorno irregolare e lobato. Le profonde restano gialliccie, puntiformi, tondeggianti od a forma di cote.

Per infissione, il bacterio forma una specie di fittone con barbicine laterali, il quale sviluppandosi produce nella gelatina una coppa di fusione. Il colorito della cultura va diventando sempre più giallo.

Colonie superf., sono dentellate o lobate e divengono presto d'un color giallo-limone.

Colonie rigogliose formanti patina irregolare poco rilevata e poco lucida, di color giallo sempre più intenso.

Per infissione si forma un fittone gialliccio con spine laterali; alla superficie, la patina va degradando dal centro alla periferia e diventando di un giallo più intenso.

Si forma una patina poco rilevata, irregolare, gialliccia e poco lucente.

Dal confronto, di cui sopra, risulta che il microrganismo da me isolato non si può confondere col *Bacterium Solanacearum* Smith; e siccome fra i microrganismi, fin'ora descritti, altro non ve n'è che presenti gli stessi caratteri, così credo non vi sia dubbio trattarsi di una specie distinta e nuova che dedico al chiarissimo prof. G. Briosi, direttore del nostro Laboratorio e che chiamo senz'altro *Bacterium Briosii* n. sp.

Per dimostrare il carattere patogeno del microrganismo furono da me fatte le seguenti esperienze.

Ho tentato di infettare delle piante sane — appositamente coltivate — bagnandone le parti con brodo di cultura pura, cercando anche di facilitare l'infezione con ferite fatte con coltello sterilizzato, o ricorrendo alla inoculazione dei frutti mediante siringa opportunamente sterilizzata. In tutti i modi ho potuto riprodurre la malattia sopra tutte le parti aeree della pianta, ma più facilmente in prossimità delle gemme ascellari e nei frutti.

CONCLUSIONE.

La Batteriosi del frutto del pomodoro è dovuta ad una specie autonoma da me chiamata *Bacterium Briosii* n. sp. Inoltre la malattia attacca non solo i frutti, ma tutte le parti aeree della pianta, producendo un processo patogeno da non potersi confondere coll'avvizzimento delle piante, quale venne descritto nella Batteriosi dello Smith.

Agronomia. — *La distruzione dei semi delle piante infeste per parte degli animali domestici.* Nota di O. MUNERATI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

In uno studio completo del problema della perpetuazione delle cattive erbe nei campi, la questione della eventuale distruzione dei semi da parte degli animali domestici (bovini, equini e ovini da un lato, e gallinacci dall'altro) deve far parte di un vasto programma di indagini specifiche.

Riserbandomi di riferire, in un'ulteriore Memoria, i risultati delle mie osservazioni sulla conservazione della vitalità dei semi negli ammassi di stallatico variamente trattato, prendo in esame, nella odierna Nota, il comportamento dei semi stessi nel loro passaggio attraverso l'apparato digerente ⁽¹⁾.

CONSIDERAZIONI GENERALI SULLA IMPOSTAZIONE DELLE ESPERIENZE.

— Ho voluto innanzitutto ridurre le osservazioni a un numero limitato di specie effettivamente infeste, e i cui semi si possono normalmente trovare nei comuni foraggi. Eccone l'elenco: *Avena fatua* L.; *Vicia segetalis*, Thuill.; *Vicia hirta*, Balb.; *Lathyrus Aphaca*, L.; *Rapistrum rugosum*, (L.) Berg.; *Sorghum halepense*, Pers.; *Rumex crispus*, L.; *Cirsium arvense*, Scop.; *Sonchus oleraceus*, L.; *Papaver Rhoeas*, L.; *Plantago lanceolata*, L.

Aggiungo che, più che l'esperimento di numerosissime specie, aveva valore, per me, la valutazione del comportamento delle specie più tipiche, in quanto a volume, conformazione e caratteri esteriori del seme: ciò avrebbe

(1) Non mi fu possibile prendere visione che dei seguenti lavori, astrazione fatta dai contributi riguardanti le cuscute e le orobanche, che non vennero da me, finora, prese in esame:

The effect of digestion and fermentation of manure on the vitality of seeds. The Maryland Agr. Exp. Station, Bull. 128, 1908 (by Edward Ingram Osvald).

Commercial Feeding Stuffs. The viability of weed seeds in feeding Stuffs. Vermont Agric. Exp. Stat.; Bull. 131, 1907, e 133, 1909.

Weed seeds in commercial feeding stuffs. Maine Agric. Station; Annual Reports.

Comment germent des graines qui ont passées à travers une vache (O. Rostrup, Copenhagen, 1900).

permesso di mettere insieme degli aggruppamenti ai quali aprioristicamente riferire qualunque seme, anche direttamente non considerato.

Ho preso invece in considerazione un fattore precedentemente trascurato, cioè l'*età del seme*, che, ai riflessi della conservazione della vitalità dell'embrione, ha, per alcune specie, valor sostanziale.

Alle su citate sementi univo poi spesso dei semi di frumento, di granoturco, di avena comune e di altre specie coltivate, per determinarne la resistenza in confronto.

Il pastone di farina di granoturco e frumento, o di fagioli cotti, servi costantemente di veicolo dei semi, mentre subito dopo si somministrava, agli animali in esperimento, del fieno comune (¹).

Quanto a separare le sementi dalle deiezioni per determinare la percentuale delle integre e delle alterate, era mio intendimento di far passare sulle deiezioni stesse un abbondante filo d'acqua in modo da recuperare, in una serie di crivelli a maglia gradatamente più piccola, i semi apparentemente intatti, e già divisi secondo la loro grossezza; ma l'insufficienza e la impraticità del metodo si palesarono immediatamente (²), onde si dovette procedere a una separazione richiedente maggior pazienza e maggior diligenza.

Una parte delle deiezioni fu sempre tenuta in disparte per essere conservata nel cumulo di stallatico presso i semi postivi direttamente, per il necessario raffronto. I semi separati venivano collocati in germinatoi per determinarne la vitalità.

ESPERIENZE CON BOVINI. — Una prima serie di esperienze (prove e controprove) fu compiuta presso il sig. Giuseppe Vicenzetti, a Cantonazzo (Rovigo), con due vacche di due anni e mezzo. Veicolo dei semi: pastone di farina di granoturco e frumento.

Una seconda serie di esperienze (prove e controprove) fu compiuta a Loreo, nelle aziende Co: Papadopoli (dirette dal Comm. Bisinotto) con gli stessi semi. Le sementi furono sempre mescolate al pastone di fagioli cotti.

(¹) Si potrebbe osservare che nel fieno possono casualmente trovarsi dei semi delle stesse specie in esperimento: si ebbe, a tale riguardo, la cura di fornire fieno di primo taglio, che è quasi costantemente privo di sementi, per quanto, in fondo, l'eventuale presenza di qualche seme di quelli in prova, non avrebbe modificato o scosso il valore delle deduzioni.

(²) Non essendo le deiezioni costituite da sostanze solubili, o, almeno, tanto finamente divise da passare facilmente, sotto l'azione della corrente d'acqua, attraverso vagli anche a larga maglia, i frammenti aggruppati ostruiscono la maglia dei vagli sottostanti così da impedire persino il normale defluire dell'acqua di lavaggio. A codesto inconveniente si ovvierebbe somministrando, anche nei giorni successivi a quello iniziale, esclusivamente pastoni; ma le condizioni non sarebbero allora normali.

Osservazioni e deduzioni. — La duplice serie di esperienze mi autorizza a considerare come definitive le seguenti conclusioni:

1°. La maggior parte dei semi passanti inutilizzati attraverso l'apparato digerente si trovano nelle deiezioni espulse 24 a 48 ore dalla ingestione; una minor parte si trova nelle deiezioni delle seconde dodici ore, e una piccola parte fino a 72-80 ore dopo.

2°. L'età, nei bovini, non esercita un'influenza specifica sul comportamento dei semi attraverso il loro sistema digerente: è il caso di osservare che, nelle condizioni normali, i bovini si mettono fuori servizio quando sono ancora relativamente giovani, quando cioè il loro apparato dentario non è logorato.

3°. Il comportamento delle varie specie di semi permette di fare una netta distinzione:

a) fra sementi di leguminose (sementi normalmente rotondeggianti e a tegumento più o meno duro) da un lato, e sementi di non leguminose (normalmente non rotondeggianti e a tegumento non duro) dall'altro;

b) e nelle sementi di leguminose: tra semi somministrati nell'anno stesso in cui si raccolgono (semi nuovi) e semi di annate precedenti (semi vecchi).

4°. Le sementi di una data specie non leguminosa si comportano, di norma, alla stessa maniera, qualunque sia la loro età: pressochè la stessa percentuale passa inutilizzata, e la stessa percentuale viene distrutta, sia che si tratti di semi dell'anno, sia di semi vecchi.

5°. L'*Avena fatua* (semi grossi e piccoli, freschi o vecchi) viene quasi completamente distrutta dai bovini. In tutte le prove, i semi si trovarono scomparsi in proporzione del 97-98 per cento!

6°. Meno dell'*Avena fatua*, ma pur tuttavia fortemente decimati sono i semi delle altre specie non leguminose più o meno infeste: *Rumex crispus* (85-90 %); *Rapistrum rugosum* (85-90 %); *Cirsium arvense* (70-75 %); *Sorghum halepense* (90-95 %); *Papaver Rhoeas* (60-70 %).

In generale, quanto più i semi sono piccoli e rotondeggianti, tanto meno facilmente vengono distrutti, certo perchè sfuggono all'azione dell'apparato masticatore.

7°. Le sementi delle più comuni specie leguminose infeste della bassa valle del Po (*Vicia segetalis*, *Vicia hirta*, *Lathyrus Aphaca*) si comportano diversamente secondo la loro età. Ecco le cifre medie risultanti dalle nostre prove:

	Semi distrutti	Semi rigonfiatisi	Semi rimasti duri
<i>Vicia segetalis</i>			
dell'annata	50 %	10 %	40 %
di un anno di età	70 "	15 "	15 "
di due o tre anni	70 "	20 "	10 "

	Semi distrutti	Semi rigonfiatissi	Semi rimasti duri
<i>Vicia hirta</i>			
dell'annata	60 %	10 %	30 %
di un anno di età	65 "	20 "	15 "
di due o tre anni	78 "	15 "	7 "

Lathyrus Aphaca

dell'annata	65 %	10 %	25 %
di un anno di età	72 "	15 "	13 "
di due o tre anni	80 "	12 "	8 "

I suesposti dati non hanno, come si comprende, un valore assoluto, potendo subire variazioni secondo il momento dell'anno in cui si compie la prova, secondo gli animali, secondo il foraggio che serve da veicolo, ecc. Essi permettono tuttavia di concludere in via categorica che *quanto più nuovo è un seme di leguminosa infesta, altrettanto meno facilmente viene distrutto nel suo passaggio attraverso l'organismo dei bovini e dei ruminanti in genere* ⁽¹⁾.

La differenza di comportamento tra semi vecchi e nuovi, deve, a mio vedere, essere così interpretata: all'atto della prima masticazione, o i semi vengono senza distinzione franti e, travolti nei movimenti del bolo, si disfanno completamente; oppure, sfuggendo all'apparato masticatore, passano tal quali nello stomaco: quivi, trovandosi in un vero e proprio termostato, o sono vecchi, e in gran parte si gonfiano e rammolliscono, o sono nuovi (dell'anno), e in buona parte restano indifferenti all'azione dell'umidità e del calore, mantenendosi inalterati e duri. Quando il bolo torna in bocca per la ruminazione, i semi che si erano inturgiditi vengono quasi totalmente schiacciati, mentre i semi rimasti duri in parte sfuggono ancora per tornare definitivamente nello stomaco. Lungo il percorso dell'intestino, in parte (forse perchè contusi) a lor volta si rigonfiano, e in parte fuoriescono stabilmente duri. Vedremo più tardi che i semi rimasti duri si comportano, in quanto a vitalità dell'embrione, come semi assolutamente normali.

8°. I semi di leguminose, paragonati a quelli delle specie non leguminose, presi nel loro complesso, si mostrano assai più resistenti. I semi di *Sorghum halepense* per esempio, e più ancora quelli di *Avena fatua*, che sono fra le piante più temute, si palesano sensibili e delicatissimi. Può ritenersi che questi semi, sia passando attraverso il tubo digerente degli ani-

⁽¹⁾ Gli sperimentatori delle stazioni americane, che si occuparono soprattutto dei *Commercial feeding stuffs* (panelli costituiti in buona parte da scarti di molino, e quindi molto ricchi di semi di cattive erbe), debbono avere operato prevalentemente con semi vecchi. La differenza di comportamento tra semi vecchi e nuovi è troppo manifesta perchè non risalti all'occhio di chi eseguisca una prova di confronto.

mali, sia con una breve ulteriore permanenza in concimaia, vengano completamente distrutti.

ESPERIENZE CON CAVALLI. — Siccome fu più volte affermato, in seguito a constatazioni dei pratici, che l'età del cavallo ha una decisa influenza sul modo col quale viene distrutta o si conserva l'avena comune nel passaggio attraverso il suo organismo, prendemmo per le nostre prove due cavalle di diversa età: una puledra di tre anni e mezzo e una cavalla di 14 anni. Ad entrambe furono somministrati i semi delle stesse specie che ci servirono per le esperienze coi bovini, alternatamente vecchi e nuovi, con prove e controprove.

Le successive somministrazioni abbracciarono il periodo 29 luglio-12 agosto. Osservazioni sussidiarie compiemmo poi saltuariamente con altri cavalli.

Le deduzioni cui siamo giunti, possono così formularsi:

1°) La maggior quantità di sementi passate inutilizzate attraverso l'organismo dei cavalli si trova nelle deiezioni del giorno successivo a quello della ingestione; quantità minima o nulla nel terzo giorno, media nel secondo.

2°) A differenza dei bovini, l'individualità nel cavallo è fattore che non deve essere trascurato. Non solo si hanno variazioni secondo l'età, ma ancora secondo la voracità dei soggetti:

a) quanto all'età, i cavalli vecchi, ad apparato masticatore logoro, lasciano passare inutilizzato un numero di semi molto maggiore che non i cavalli giovani a tavola dentaria normale;

b) quanto alla voracità, dal modo col quale un cavallo mangia, ad es., una razione di avena, si può desumere se nelle deiezioni vi saranno semi integri in maggiore o minore proporzione.

3°) A differenza dei bovini, i cavalli distruggono soprattutto i semi rotondi (veccie, latiri, 97-99 %), mentre lasciano passare in discreta percentuale l'*avena fatua* (4-7 %), i *rumex*, i *rapistri* (5-8 %) e, più ancora, l'avena comune (7-15 %). La distruzione dei semi di leguminose non varia sensibilmente, sia che si tratti di sementi vecchie, sia di sementi nuove (dell'anno).

L'*avena fatua*, come si vede, è molto meno risparmiata dell'*avena comune*: forse perchè il tegumento di questa è levigato e ad incrostazione silicea e perciò capace di scivolare, di sfuggire all'apparato masticatore, mentre l'*avena fatua* ha tegumento ruvido o meno resistente.

ESPERIENZE CON PECORE. — Era per me di particolarissima importanza il compiere accurate e minuziose indagini sul comportamento dei semi di piante infeste attraverso l'organismo degli ovini. Soprattutto mi interessava

di controllare le risultanze di Hills e Jones della Stazione agronomica del Vermont ⁽¹⁾, i quali avevano concluso che, a differenza dei cavalli e dei bovini, le pecore (e il pollame) distruggono completamente le sementi delle erbacce. Sin dalla primavera del 1909, il cav. Guido Conti, direttore del tenimento « Gallare » di Migliaro (Ferrara), metteva cortesemente a mia disposizione due pecore di media età, di razza modenese, che per lo spazio di due mesi (luglio e agosto) sottoposi alle prove più svariate di alimentazione, con sementi, infeste o meno, le più diverse e di diversa età. Or ecco le più importanti deduzioni:

1^a) La maggior parte delle sementi passate inutilizzate attraverso l'organismo della pecora si hanno 24-48 ore dopo l'avvenuta ingestione.

2^a) La distruzione delle sementi delle più comuni specie non leguminose (coltivate e spontanee) della bassa Valle del Po, da parte della pecora, è pressochè completa. Rarissimi sono gli esemplari di sementi di *Rapistro*, *Rumex*, *Sorghum halepense*, ecc., e affatto negativa la ricerca di *Avena fatua*, di frumento, granoturco e altri semi a tegumento delicato.

3^a) Il comportamento dei semi delle specie leguminose attraverso l'organismo degli ovini ha molta analogia con il comportamento degli stessi semi attraverso l'apparato digerente dei bovini: permangono, cioè, le differenze tra semi vecchi e semi nuovi, esclusa però, tra le specie considerate, la *Vicia hirta*, i cui semi sono molto più grossi e generalmente più fragili.

I semi di *Vicia segetalis* e di *Lathyrus Aphaca*, quasi totalmente distrutti se vecchi, passano inutilizzati, cioè integri e capacissimi di germinare, in ragione di circa il 10 per cento, se dell'annata. Dei semi vecchi di *Vicia segetalis* si trovano nelle deiezioni frammenti di tegumento, mentre parecchi dei semi vecchi di *Lathyrus Aphaca* si presentano turgidi e deformati, per quanto integri.

LA FACOLTÀ GERMINATIVA DEI SEMI PASSANTI INUTILIZZATI ATTRAVERSO L'ORGANISMO DEGLI ANIMALI. — I semi, che non vengono distrutti nel loro passaggio attraverso l'organismo degli animali, conservano la loro facoltà germinativa normale.

Tra i semi di leguminose, quelli che già si trovano rigonfiati perdono tosto la loro vitalità se non si pongono subito in germinatoio; ma anche quelli che si mettono immediatamente in condizioni per continuare la loro evoluzione, in buona parte (particolarmente se vecchi) si spappolano. Ecco alcune cifre:

Numero 100 semi di Vicia segetalis del 1907, trovati rigonfi subito dopo il loro passaggio attraverso un bovino (posti a germinare il 26 luglio 1909): al 3 agosto germinati 17; i rimanenti spappolatisi.

(1) Ved. pubblicazioni citate.

Num. 100 semi di *Vicia segetalis* del 1909, trovati rigonfi subito dopo il loro passaggio attraverso un bovino (posti a germinare il 29 luglio 1909): al 10 agosto germinati 28; i rimanenti spappolatisi.

Num. 50 semi di *Lathyrus Aphaca* del 1907, trovati inturgiditi dopo il loro passaggio attraverso una pecora (messi a germinare il 12 agosto 1909): al 20 agosto germinati 12; i rimanenti spappolatisi.

Num. 50 semi di *Lathyrus Aphaca* del 1909, rigonfiati attraverso il tubo digerente di una pecora (messi a germinare il 12 agosto 1909): al 23 agosto germinati 25; i rimanenti spappolatisi.

I semi di leguminose che passano duri non si differenziano minimamente dai semi duri normali della medesima partita, come appare da questo prospetto che congloba i dati riferentisi agli stessi gruppi di semi di cui alle cifre precedenti:

	Germinazione di semi trovati duri			
	<i>Vicia segetalis</i> del 1907	<i>Vicia segetalis</i> del 1909	<i>Lathyrus Aphaca</i> del 1907	<i>Lathyrus Aphaca</i> del 1909
Semi germinati nel 1909	43 %	28 %	38 %	26 %
" " " 1910	3 "	25 "	12 "	17 "
Ritrovati duri . . .	12 "	21 "	9 "	27 "

I semi di specie non leguminose palesano sempre, nel loro comportamento, delle anomalie che mal si giunge ad interpretare. Molte sementi così dette fresche, anche dopo lunghi mesi di permanenza in germinatoio, non manifestano alcuna alterazione, per quanto siano rimaste in gran parte inattive. Siccome si tratta tuttavia di attributo comune anche agli stessi semi normali, si può affermare che quando essi passano inutilizzati attraverso l'organismo di un animale, senza essere stati profondamente lesi, non si differenziano, se posti in grado di evolversi, dai semi normali.

ESAME COMPARATIVO DEI RISULTATI E CONCLUSIONI. — Le sementi delle specie spontanee e coltivate si comportano variamente, secondo che si facciano passare attraverso l'organismo dei bovini e degli ovini da un lato, e cavalli dall'altro.

I semi rotondeggianti di leguminose (vecchie varie, latiri) vengono distrutti dal cavallo assai più che dai bovini; molti altri semi (avena fatua e analoghi) passano più facilmente inutilizzati attraverso l'organismo del cavallo che dei bovini.

Caratteristico, nei ruminanti, il comportamento dei semi di leguminose secondo la loro età: i semi vecchi (facilmente rigonfiabili) sono molto più distrutti dei semi nuovi o dell'annata (impermeabili, in grande maggioranza, all'acqua). La prontezza germinativa nei semi di leguminose, è dunque, un fattore di debolezza.

A prescindere dai gallinacei, gli ovini posseggono al più alto grado la facoltà di distruggere i semi ingeriti. Gli ovini, animali per eccellenza delle terre povere, cercano forse di trarre il massimo profitto dagli alimenti, mettendoli, in conseguenza di una spinta e perfetta triturazione (¹), nelle più propizie condizioni per essere digeriti e assimilati.

La facoltà germinativa dei semi trovantisi nelle deiezioni può ritenersi normale, non dissimile cioè da quella che avrebbero avuto gli stessi semi se non fossero passati attraverso l'apparato digerente. Detti semi, nelle condizioni ordinarie, in ispecie dove si fa dell'agricoltura intensiva, vanno portati nel cumulo di stallatico, e solo in condizioni eccezionali (animali al pascolo, ecc.) cadono direttamente sul terreno. Ora, mentre questi ultimi possono essere considerati capaci di conservare, in buona percentuale, la vitalità loro, la vitalità della grandissima maggioranza dei primi va ad essere irrimediabilmente compromessa (²).

Preso la questione nelle sue linee sostanziali, può concludersi che il ciclo delle sementi ingerite dagli animali domestici si chiuda tutto al più quando esse giungono al cumulo di stallatico e che pertanto gli animali domestici costituiscono, nei paesi ad agricoltura avanzata, un fattore secondario di perpetuazione delle piante infeste.

Agronomia. — L'azione efficiente dell'apparato masticatore nella distruzione dei semi da parte degli animali domestici. Nota del prof. O. MUNERATI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Ved. mia Nota: *L'azione efficiente dell'apparato masticatore nella distruzione dei semi da parte degli animali domestici.*

(²) Ved. mia Nota: *Sulla presunta perpetuazione delle specie infeste attraverso lo stallatico.*

Patologia vegetale. — *Sul parassitismo di Diaporthe parasitica Murr. per il castagno*. Nota di E. PANTANELLI, presentata dal Socio G. CUBONI.

Se le notizie che pervengono dall'America non sono esagerate, si può dire che la « canker o bark-disease » del castagno prodotta da *Diaporthe parasitica* Murrill = *Valsonectria parasitica* Rehm, sia la più disastrosa malattia che si conosca per gli alberi d'alto fusto. Infatti le malattie fungine più pericolose per gli alberi forestali, sono quelle prodotte da *Trametes pini*, *Armillaria mellea*, *Dematophora* sp. ecc., le quali però non arrivano ad uccidere un albero che in parecchi anni, e, per essere funghi sotterranei, sono legati a condizioni speciali di terreno. Invece, secondo Metcalf e Morrill la *D. parasitica* richiede solo un'estate calda ed umida per espandersi con rapidità simile a quella con cui abbiamo visto diffondersi l'oidio della quercia in Europa, ma con ben più gravi conseguenze: la morte dell'albero in due anni.

La malattia fu osservata per la prima volta nell'estate del 1905 da Merkel ⁽¹⁾ nel Giardino Zoologico di New-York, e questi richiamò su di essa l'attenzione del dott. W. A. Murrill del Giardino Botanico di quella città. A Murrill si deve lo studio scientifico della malattia, che egli dal 1905 al 1908 ha descritto in diverse Note ⁽²⁾, la cui traduzione è stata opportunamente inviata dal cav. Guidi Rossati, R. Enotecnico a New-York, al nostro Ministero di Agricoltura ⁽³⁾, il quale incaricò la nostra Stazione di ricerche in proposito, per stabilire se questo fungo sia nuovo per l'Italia, se sia capace di attaccare il castagno europeo nel nostro clima. Infatti il castagno che si coltiva agli Stati Uniti è una varietà differente dalla comune *Castanea vesca* L., e negli Stati in cui si è sviluppata la malattia, l'inverno è estremamente rigido, essendo frequenti minimi di — 25° e — 30° C.

Il Ministero di Agricoltura degli Stati Uniti ha incaricato degli studi della malattia il Laboratorio di Patologia forestale di Washington diretto

⁽¹⁾ Merkel H. W., *A deadly fungus on the american chestnut*. Ann. Rept. N. Y. Zool. Society, X (1906), pp. 97-103.

⁽²⁾ Murrill W. A., *A serious chestnut disease*. Journ. N. Y. Bot. Garden, VII (1906), pp. 143-153; Id. *Further remarks on a serious chestnut disease*. Ibidem, pp. 203-211; Id., *A new chestnut disease (diagnosi del fungo)*. Torreya, VI (1906), pp. 186-189; Id., *The spread of the chestnut disease*. Journ. N. Y. Bot. Garden, IX (1908), pp. 23-29; Id., *The chestnut canker*, Torreya, VIII (1908) (estr.).

⁽³⁾ Ne abbiamo già fatto parola in: *Relaz. s. attiv. d. R. Staz. d. Patol. veg. per il 1908-1909*, Roma (G. Bertero, 1910, p. 40).

dal dott. Haven Metcalf. Questi ci ha inviato nel gennaio ed aprile 1909, entro astucci di latta saldati, alcuni rametti di castagno infetti, che ho adoperato per controllare i dati del dott. Murrill.

La malattia si presenta sui rami con chiazze allungate, di color rosso bronzato o scolorite e leggermente depresse, che hanno fatto dare alla malattia il nome di « canker-disease »; questo nome non sarebbe esatto, intendendosi per *cancro* di un albero alterazioni ben diverse.

In queste chiazze la corteccia è tutta seminata di pustule, da cui il fungo erompe in forma di piccoli cuscinetti di colore giallo di Siena. Nel materiale americano raccolto in autunno, questi cuscinetti erano costituiti da un feltro miceliare, da cui in camera umida si formarono entro poche ore innumerevoli microconidii a forma di bastoncino, lunghi $3,8 \mu$ e grossi $1,7 \mu$, dritti, arrotondati alle estremità, i quali tutti insieme costituivano grosse gocce gialle alla superficie delle pustule. Lo stroma miceliare s'insinuava fra i diversi strati della corteccia, e mandava un fitto reticolato di ife fino al cambium, che appariva qua e là imbrunito e distrutto, raramente fino al legno, la cui porzione periferica era in tal caso invasa da ife del fungo ed in preda a gommosi.

In natura pare che il legno non venga invaso, come si osserva anche in altre Valsacee, e il danno consiste nella morte dei tessuti corticali, che sotto l'influenza del fungo si compie nella stessa estate; la porzione di ramo situata sopra al focolare d'infezione si secca.

Dai microconidii seminati su agar all'estratto di castagno ottenni micelio biancastro, che qua e là produsse noduli stromatici consistenti, dai quali poi si formarono masse di microconidii di color giallo vivo.

Inoculati in rametti di castagno di 5-20 mm. di diametro, sterilizzati a vapore, i microconidii danno subito un micelio, che in un mese a 25°C . invadono tutto il substrato, fabbricando cuscinetti stromatici e picnidii concamerati che sollevano i diversi strati di periderma, ed erompendo poi alla superficie con micelio ed una massa tale di microconidii da costituire cordoni attorcigliati, gialli, come si osserva nelle *Valsa*, *Nectria* ecc., in primavera, e come anche Murrill e Metcalf indicano per il fungo in parola. Anche il micelio superficiale è giallo vivo per un lipocromo in gocce che contengono le sue cellule; il micelio interno è gialliccio.

Inoculati i rametti staccati di castagno vivi, lavati con sublimato all'1‰ ed acqua sterile, tenuti umidi in grandi provette sterili o in vasi di vetro coperti, i microconidii danno pure micelio, che dopo due settimane a 25°C . ha già invaso il periderma; dopo due mesi erompono alla superficie i noduli stromatici ed i microconidii, ma intanto i rametti erano già imbruniti e morti. Dopo 8 mesi circa la produzione dei picnidii era appena cominciata in questi rami. Tale portamento fa pensare che la *D. parasitica* non formi picnidii sui rami vivi e sani, ma più tardi, dopo la morte del ramo.

Il materiale americano raccolto alla fine dell'inverno portava i peritecii. Essi hanno la forma di fiaschetti con collo lungo fino a 3-4 mm., parete nera esternamente, incolore di dentro, e stanno affondati, in numero di 13-18 per pustula, nello stroma miceliare, sotto al cuscinetto esteriore, in cui si aprono i loro colli.

La dimensione e forma degli asci e delle ascospore bicellulari giustificano a mio avviso la diagnosi ed il nome di *Diaporthe parasitica* dato da Murrill. Rehm invece ⁽¹⁾ ritiene che sia una *Valsonectria*. Questo genere, stabilito da Spegazzini nel 1883, comprende due sole specie saprofittiche, secondo Saccardo ha affinità con alcune *Diaporthe*, ma possiede peritecii circinanti, asci cilindrici e troncati all'apice, caratteri che mancano nel fungo in parola, che ha tutti i caratteri delle *Diaporthe*.

La forma conidiale ricorda un ifomicete assai comune anche in Europa sui castagni e su parecchi altri alberi, il quale, secondo cortese comunicazione del prof. P. A. Saccardo, sarebbe la *Naemaspora microspora*. Questa a sua volta sarebbe la forma picnidica di *Diatrype stigma*, un'altra sferiaceea non molto lontana dalla *Diaporthe*, di parassitismo assai dubbio.

Però lo stato picnidico del fungo in questione non può essere confuso con quello di *Diatrype stigma*, perchè i picnidii sono nel primo racchiusi nello stroma e concamerati, i microconidii o ptenospore che vi si originano non sono ricurvi, nè lungamente filiformi, nè hanno le dimensioni di quelli di *Naemaspora microspora*. Essi appartengono indubbiamente alla *D. parasitica*, perchè li ho ottenuti identici in cultura pura su rami di castagno tanto partendo dai microconidii, quanto dalle ascospore di *Diaporthe*.

Invece finora non ho potuto osservare la formazione dei peritecii partendo dai microconidii o dalle ascospore, in quasi due anni di cultura su rami o su agar al castagno. Pare che anche Murrill e Metcalf non siano riusciti ad ottenere peritecii in cultura pura. Può darsi che occorra l'azione di ripetuti inverni per determinare la formazione dei peritecii, e certe condizioni di substrato che difficilmente si possono realizzare in cultura pura, quale la grossezza della scorza.

Si conoscono altre cinque *Diaporthe* sul Castagno, di cui quattro in Europa, ed una raccolta presso New-York:

<i>D. castanea</i>	(Tul.) Sacc.	trovata in Italia e Francia su rametti morti:		
" <i>leiphaemoides</i>	(Fuck.) Sacc.	" Germania	—	" "
" <i>innata</i>	(B. e C.) Sacc.	" New-York	—	" "
" <i>castaneti</i>	Nits.	" Italia e Germania	"	" "
" <i>nigrocincta</i>	Pass.	" Francia	—	" "

(1) Rehm H., Annales mycol., V (1907), pag. 210.

Ma le prime due, che Saccardo crede identiche fra loro ⁽¹⁾ hanno ascii appendiculati, clavati, ascospore uniseriate; la terza ha peritecii circinanti, con collo breve, ascospore acuminate alle due estremità; la quarta produce linee oscure nella corteccia e nel legno, peritecii disposti in serie, o in 2-5 per pustula, che si affondano talvolta nel legno, con collo breve; la quinta non ha parafisi, ma le ascospore sono disposte in una sola serie nell'asco. Le dimensioni sono molto diverse (μ):

	microconidii	ascii	ascospore
<i>D. castanea</i>	6-7 \times 1,5-2	40-55 \times 8-9	14-18 \times 3-3,5
" <i>leiphaemoïdes</i>	1-10 \times 3-4	48 \times 10	16-18 \times 3-4
" <i>innata</i>	—	—	7-8 \times —
" <i>castaneti</i>	—	70-80 \times 10,8	15-18 \times 4-5
" <i>nigrocincta</i>	—	110 \times 10	12-20 \times 7,5
" <i>parasitica</i>	{ sec. Murrill 2-3 \times 1	45-50 \times 9	9-10 \times 4-5
	{ " me (media) 3,8 \times 1,7	44,1 \times 8,7	8,6 \times 4,0

Pare dunque che si tratti realmente di una nuova specie di *Diaporthe*, e certamente essa sarebbe nuova per l'Europa.

Ciò che a noi importa stabilire è, se essa sia tanto violenta da uccidere i castagni adulti in così breve tempo, come affermano i patologi americani ⁽²⁾. Murrill ha inoculato con successo piccoli castagni in vaso ed in vivaio; il fungo si sviluppò, specialmente se le piante erano tenute in luogo molto umido, e i rami inoculati intristirono e si seccarono. Metcalf ⁽³⁾ ha eseguito nel 1909, 500 inoculazioni coronate da successo su castagni in vaso ed all'aperto.

Siccome il castagno edule americano è una varietà diversa dalle nostre, era necessario verificare con maggior sicurezza se la *D. parasitica* possa attaccare il castagno nel nostro clima, perchè a dir vero i risultati del 1909 lasciavano credere che questo fungo si sviluppi solamente sulle parti morenti, ed abbia quindi un carattere più saprofitario che parassitario. Mi sono però limitato ad inoculare piccoli castagni allevati in vaso nel nostro Laboratorio, in una piccola serra ben custodita, prendendo le più rigorose precauzioni per evitare il trasporto dei germi del parassita.

(1) Sylloge, I (1882), pag. 606.

(2) Hodson E. R., *Extent and importance of the chestnut bark disease*. U. S. D. A., Bur. of Plant Ind., Bull. N. 122 (ottobre 1908); Mickleborough, E. S. R., 1910, 22, 652. Metcalf H. e Collins J. F., *The present status of the chestnut bark disease*. Ibidem. Bull. N. 141, parte V (30 VIII, 1909).

(3) Metcalf H., *The chestnut bark disease*. Science, XXXI (1910), pag. 748.

I microconidii o le ascospore furono ripartiti in gelatina fluida (5 %) all'estratto di scorza di castagno con 1 % di glucosio, ove anche le ascospore germinano in poche ore a temperatura ordinaria, emettendo un tubo da ognuna delle due cellule che le costituiscono; e questa gelatina fu applicata entro sottili tagli interessanti solamente il periderma, oppure penetranti fino al cambio, o sopra abrasioni che lasciavano a nudo la corteccia viva o addirittura il cambio. In altri casi la gelatina con le ascospore o i microconidii fu deposta all'ascella dei rametti, che secondo Metcalf costituisce una delle porte d'entrata del fungo; in altri casi fu introdotta fra le squame delle gemme. I tagli e le scorticature furono poi coperte, 24 ore dopo la inoculazione, con gelatina sterile al 10 %, perchè non si prosciugassero. Le inoculazioni con microconidii prelevati dalle culture pure su agar all'estratto di scorza di castagno furono eseguite il 15 febbraio, quelle con ascospore prelevate dal materiale americano conservato per un anno all'asciutto il 3 marzo 1910.

Durante l'estate, in due degli 8 castagni inoculati con ascospore si seccarono i germogli, in altri due si seccarono in autunno, e così pure tre degli 8 castagni inoculati con microconidii. In questi 7 casi l'essiccamento dei germogli è stato rapidissimo, senza speciali alterazioni delle foglie, che si prosciugarono in toto al pari del ramo o del fusto fino al punto ove si era sviluppato il micelio nella scorza. In questo punto si è formata qualche tempo dopo la macchia scolorata rossastra, da cui poi in gennaio hanno cominciato ad erompere gli stromi gialli del fungo. In un altro dei castagni inoculati con microconidii dopo la caduta delle foglie si è cominciata a formare durante l'inverno la macchia scolorata; in questa regione il parenchima corticale è imbrunito ed invaso dai filamenti miceliari del fungo.

Il micelio invia qualche filamento fino al cambio; sulla sua traccia il tessuto imbrunisce e muore fino ad una certa distanza, come se fosse avvelenato da prodotti di secrezione del micelio. Finora (gennaio 1910) questo ha prodotto solo stromi, microconidii e picnidii concamerati nelle piante infette. Esso si è sviluppato solo alla base di questi giovani castagni, dove la scorza aveva già 3 anni; le iniezioni sui rami di 1-2 anni non hanno dato alcun risultato, e così pure le infezioni per semplice contatto. Occorre una ferita perchè il fungo penetri nel tessuto vivo. Sotto la zona invasa il fusto è rimasto vivo ed anzi nei due castagni seccati per i primi ha cacciato nuovi germogli in autunno.

L'elevata proporzione d'infezioni con esito positivo e la rapida morte dei castagni in vaso mostrano che questo fungo è realmente un parassita pericoloso non solo per la *Castanea vesca* var. *americana* Michaux, ma anche per il nostro castagno, tanto più che molte delle sue ascospore si sono conservate germinabili all'asciutto per due anni. La loro germinazione comin-

ciava in 2-3 ore a temperatura ordinaria in estratto di scorza di castagno addizionato di 1% di glucosio quando erano fresche, dopo due anni richiede 1-2 giorni. I microconidii si sono mostrati altrettanto virulenti, sebbene da un anno fossero coltivati su agar all'estratto di castagno, e la facilità con cui si formano i picnidii anche in rami sottili dà a pensare, perchè ognuno di essi produce un numero sterminato di conidii che si spandono alla superficie del fusto durante la stagione umida e resistono all'essiccamento anche per 2 anni.

Quanto alle cause fisiologiche che predispongono la corteccia del castagno alla penetrazione della *Diaporthe parasitica*, Clinton ⁽¹⁾ ritiene che i freddi invernali abbiano la massima importanza, opinione già manifestata anche da Murrill. Metcalf invece dà più peso alle ferite (1910). Nelle mie prove il fungo penetrò solamente per i tagli; il suo sviluppo nei tessuti dell'ospite si è compiuto in piena estate, i picnidii però si sono formati dopo i primi freddi. Ambedue questi fattori hanno probabilmente importanza per il ciclo biologico del fungo, e certo l'età e lo stato della scorza hanno una importanza non minore, perchè la scorza di un anno non viene attaccata, e i peritecii si formano solamente nelle corteccie di diversi anni.

L'infezione è così rapida e dannosa per la vitalità dell'albero, che se invadesse i nostri castagneti si andrebbe probabilmente incontro a un disastro, come è successo agli Stati Uniti, ove secondo Metcalf, 2 milioni di castagni ne perirono dal 1906 al 1909. Non resterebbe allora altro scampo se non la sostituzione del castagno giapponese, *Castanea crenata* Sieb. e Zucc., che è l'unica specie immune secondo le prove di Metcalf ⁽²⁾. Ma siccome il castagno giapponese, che già è stato sperimentato in Francia contro il mal dell'inchiestro da Prunet ⁽³⁾ come portinnesto resistente ⁽⁴⁾, dà frutti o legname peggiori del nostro castagno o di quello americano, occorrerebbe ricorrere alla ibridazione per ottenere varietà nuove di castagno, che alla immunità contro la *Diaporthe* uniscano la squisitezza del frutto e le buone doti del legname, compito a cui si è accinto il Laboratorio di Patologia forestale di Washington.

(¹) Connecticut State Agric. Exp. Station, Report of the Botanist for 1907-1908.

(²) *The immunity of the chestnut to the bark disease* U. S. Dep. Agric. Bur. of Plant Ind., Bull. N. 121 (febbraio 1908).

(³) Prunet et Gigord, *La reconstitution des châtaigniers à l'aide de châtaigniers exotiques*. Bull. Soc. Nat. Agric., 1907, pp. 64-65; Prunet, *Comptes rendus*, CLI, 1909, pag. 19-46; Progrès agr. et vit., XXVII (1910), I Sem., pag. 124 e 634; cfr. anche J. da Camara Pestaña, Bul. R. Soc. Port. Agric., IX (1907), pp. 686-687.

(⁴) Farcy, Progrès agr. et vit., XXVII (1910), I Sem., pag. 592, dice che si ottengono migliori risultati contro il mal dell'inchiestro innestando il castagno sulla quercia, ma ciò non varrebbe contro la *Diaporthe*.

Intanto, dopo aver trovato che questo nuovo nemico americano è infesto anche ai nostri castagni, non possiamo che associarci a Metcalf ed Henry ⁽¹⁾ nel richiamare su di esso l'attenzione dei paesi castanicoli, affinchè invitino i rispettivi Governi ad unirsi per impedire l'importazione di qualunque materiale di castagno, soprattutto della scorza, dagli Stati Uniti.

Fisiologia. — *Contributi alla Fisiologia del Labirinto* ⁽²⁾.
II. *Un metodo operativo per la distruzione dei canali semicircolari del cane*. Nota del dott. M. CAMIS, presentata dal Corrispondente V. ADUCCO.

Tra le numerosissime ricerche eseguite sopra i canali semicircolari, relativamente poche sono quelle condotte sopra il cane. La ragione per cui quasi tutti gli sperimentatori predilessero per le loro esperienze il piccione, o la rana, o i pesci, risiede nella maggiore facilità con cui si possono in questi animali aggredire i canali semicircolari, sia per distruggerli che per portarvi lesioni o stimoli localizzati. La maggiore opportunità che il cane offre allo studio di alterazioni di moto e di senso, quali possono determinarsi con l'intervento sperimentale sui canali semicircolari, mi ha però indotto a scegliere questo animale per una serie di ricerche che verrò esponendo. Senonchè, il metodo seguito da quelli autori che fin qui vollero distruggere o ledere i canali semicircolari nel cane, presenta, a mio avviso, un grave inconveniente: quello di portare alla distruzione anche della chiocciola e dell'orecchio medio. Ricorderò, a questo proposito, solo la descrizione data dall'Ewald ⁽³⁾ del suo metodo operativo sul cane, dalla quale appare che, aperta la bolla timpanica, ed asportato il timpano e gli ossicini dell'udito, egli passava alla distruzione della chiocciola. Ciò fatto, egli apriva e svuotava il vestibolo penetrando dalla finestra ovale, e terminava con l'asportazione dei canali semicircolari.

E vero che Fano e Masini ⁽⁴⁾ descrissero alcune esperienze, nelle quali, aperta la bolla mastoidea, distruggevano solo i canali semicircolari pene-

⁽¹⁾ Henry E., *La maladie des Châtaigniers aux Etats-Unis et en Europe*. Ann. sc. agron. (3), vol. IV (1909), pp. 241-251.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Pisa.

⁽³⁾ R. J. Ewald, *Physiologische Untersuchungen über das Endorgan des Nervus Octavus*. Wiesbaden 1892 (cfr. pagg. 197-200).

⁽⁴⁾ G. Fano e G. Masini, *Intorno agli effetti delle lesioni portate sull'organo dello udito* (Lo Sperimentale, 1893, XLVII, pagg. 353-405).

trando dalla finestra ovale; ma questo atto operativo, non solamente implica la distruzione dell'orecchio medio, ma mi si è dimostrato di esito assai difficile e incerto quando si voglia risparmiare la chiocciola (¹).

Allo scopo di portare la lesione esclusivamente sui canali semicircolari ho quindi adottato un processo, che credo utile riferire perchè mi diede ottimi risultati.

La topografia dell'orecchio interno nel cane non è, ch'io sappia, esattamente descritta, dal punto di vista che ci interessa. Anche il Trattato di anatomia del cane di Ellemberger e Baum non porta che qualche notizia sommaria, e le belle immagini fotografiche del Gray (²) rappresentano il labirinto membranoso, sicchè non è facile da esse trarre un sicuro criterio di orientamento per aggredire la rocca petrosa.

Ho quindi eseguito alcune ricerche anatomiche preliminari, le quali mi hanno mostrato che la topografia delle varie parti del labirinto, pur conservando il tipo generale comune ai mammiferi, offre qualche carattere peculiare.

Ciò può sintetizzarsi brevemente, dicendo che i rapporti topografici delle varie parti del labirinto fra loro sono nel cane una esagerazione di quelli che si osservano nell'uomo. E cioè, rispetto al vestibolo, la chiocciola è situata più in avanti, più in basso, e più medialmente, e i canali semicircolari sono situati più in alto, più indietro, e più all'esterno nel cane che non nell'uomo.

Allo scopo di determinare esattamente questi rapporti, ho praticato le sezioni in serie di una porzione del temporale sinistro di un cane, e cioè della rocca e della bolla timpanica. Il temporale era stato decalcificato con acido nitrico e cloridrico, ed incluso in paraffina. Le sezioni erano dello spessore di 80 μ , praticate nel senso antero-posteriore, cominciando dall'alto e andando verso il basso. Un grande numero di sezioni fu da me disegnato per mezzo dell'apparecchio di proiezione di Leitz, sopra carta millimetrata per avere più facile l'orientamento dell'immagine. L'ingrandimento era per lo più di 8, qualche volta di 16 volte.

La ricostruzione del labirinto sulla base dei disegni è assai chiara, e credo inutile spendere molte più parole di quelle che servono ad illustrare le figure. Le sezioni erano circa centotrenta, delle quali, le prime 25 non

(¹) Anche i metodi proposti da diversi autori per giungere all'orecchio interno di altri mammiferi (gatto, coniglio, cavia) presentano lo stesso inconveniente, giacchè, in tutti la via di penetrazione è la bolla mastoidea o il condotto uditivo esterno. Cfr. la esposizione critica di S. v. Stein, *Die Lehren von den Funktionen der einzelnen Theile des Ohrlabirinth*, Jena, G. Fischer 1894.

(²) A. A. Gray, *The labyrinth of animals*. London, Churchill, 1907-1908.



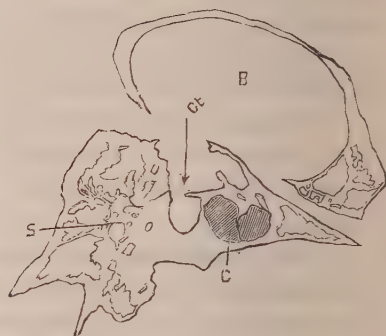
40



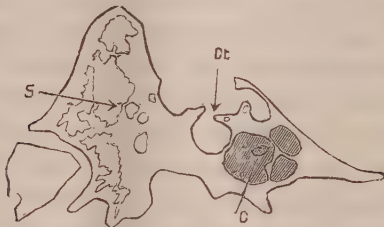
43



48



65



75



82



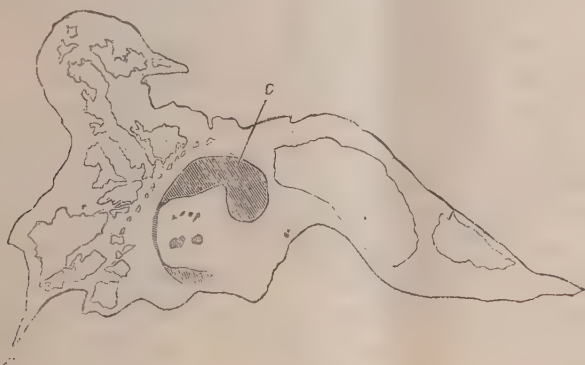
98

FIG. 1. — Sezioni trasversali antero-posteriori della rocca petrosa e di parti vicine del temporale sinistro.

B = bolla mastoidea; *S* = strato spongioso dell'osso occipitale e della squama del temporale, in corrispondenza alla base della rocca; *T* = tragitto del foro di trapano per giungere ai canali semicirculari; *a* = sezione trasversale del canale posteriore; *b* = sezione trasversale del canale posteriore; *v* = vestibolo; *Ct* = canale trasversale; *F* = forame; *m* = meatus; *C* = canale; *Car.* = carotica.

interessano che lo spigolo superiore della rocca, senza toccarne ancora le strutture caratteristiche della rocca, che sono situate alquanto più in basso. Una quarantina di sezioni interessano i canali semicircolari e il vestibolo, e quindi appaiono le sezioni dove è compresa la chiocciola. Nella figura 1 ho riprodotto pochissime sezioni, di alcuna delle quali ho ommesso di disegnare la bolla timpanica, giacchè la parte essenziale per il nostro scopo è la rocca. Il numero portato da ciascuna figura indica il numero progressivo delle sezioni; le parti tratteggiate significano le cavità labirintiche.

Nella 40 si vedono in a_1 il *crus ampullare superior*, e in a il *crus commune*, tagliati di sbieco; in b una sezione trasversale del *canalis posterior*.



55

Fig. 2. — Sezione della rocca che mostra in C il canale esterno tagliato parallelamente al suo piano. Ingrandimento 8 volte.

Nella sezione 43, i due *crura* si sono riuniti nel vestibolo v ; il quale appare più ampio in corrispondenza della sezione 48 dove i *crura canalis* quasi più non si vedono a causa della grande obliquità con cui sono tagliati.

La sezione 55, disegnata a parte, mostra una sezione quasi completa e parallela al suo piano, del canale orizzontale. La sezione 65 interessa già la *cochlea*, che naturalmente è tagliata obliquamente rispetto al suo asse; in questa sezione si vede il giro basale, mentre nella figura seguente (sez. 75) appare anche tutto il giro medio. La chiocciola nel cane ha una configurazione a cono più allungato che nell'uomo, e presenta, invece che tre, quattro giri. Questo è un carattere comune alla chiocciola dei carnivori, che è notato nella già citata opera del Gray, e che io avevo potuto constatare in un preparato di laberinto membranoso, ottenuto da una rocca decalcificata in acido nitrico e fluoroglucina. Anche dalle sezioni seriali questa disposizione si rileva chiaramente: nella sezione 82 si vedono interessati tre giri cocleari, e si vede il giro basale comunicare, per mezzo della finestra rotonda F , con

il *cavum tympani*, essendo distrutta naturalmente, nella preparazione, la membrana timpanica secondaria. L'ultima figura mostra che, andando sempre verso il basso, la sezione non taglia più la chiocciola se non vicino alla sua superficie inferiore.

Da quanto si è notato appare che una lesione portata sulla parte postero-superiore della rocca petrosa, può distruggere i canali semicircolari senza toccare la chiocciola, alla quale si può giungere solo estendendo ancora la lesione in basso e in avanti. La via per penetrare nella rocca è segnata con la lettera T nella sezione 40, dove le due linee nere indicano il pozzetto scavato dal trapano nello spessore dell'osso occipitale.

Il processo operatorio è il seguente: L'animale è fissato sull'apparecchio di contenzione a cavalletto, con il capo flesso in avanti in modo da poterne dominare la regione della nuca; ha ricevuto un'ora prima, circa un centigr. di morfina per kgr. di peso, ed è poi anestetizzato con miscela A. E. C. Si pratica una incisione longitudinale che passa tra la protuberanza occipitale esterna e l'apofisi giugulare e che si estende per una lunghezza variabile secondo le dimensioni dell'animale, ma che va da un paio di centimetri oltre la linea curva occipitale superiore fino alla 2^a vertebra cervicale. Divaricati con uncini a peso i margini dell'incisione cutanea, si incidono col bisturi le inserzioni muscolari lungo la linea curva occipitale e si staccano i muscoli con lo scolla-periostio così da scoprire la porzione nucale della squama dello occipitale. Il campo è tenuto accessibile da un assistente per mezzo di due divaricatori.

A questo punto si applica una corona di trapano in corrispondenza della base dell'apofisi giugulare, che si è asportata con qualche colpo di sgorbia allo scopo di facilitare l'applicazione del trapano. Nelle mie prime esperienze io applicavo il trapano un po' medialmente alla apofisi giugulare (¹). Ma in seguito ho potuto accertare che in questo modo è più facile, se la direzione del foro non è esattissima, sfondare la parete anteriore della rocca, con pericolo di ledere i centri; è quindi assai preferibile applicare il trapano piuttosto all'esterno che all'interno dell'apofisi giugulare, come è indicato nella figura 3. La direzione del foro deve essere parallela al piano sagittale del cranio, e quindi divergente in avanti e infuori dell'asse longitudinale della rocca, che è diretto in avanti, all'interno e in basso. Quando si senta, dalla resistenza che incontra il trapano, di avere attraversato lo strato d'osso spongioso, si vuota accuratamente, con un piccolo cucchiaino, la cavità, e si sostituisce alla corona una piccola fresa. Io ho adottato una serie di punte sferiche per trapano da dentista, e le ho trovate opportunissime per questa parte essenziale dell'operazione.

(¹) Queste esperienze furono oggetto di una comunicazione all'VIII Congresso di Fisiologia (Vienna, settembre 1910).

Per eseguirla è necessario illuminare fortemente il campo: ciò che ottenevo con uno specchio frontale per laringoscopia ed una lampada a gas ad incandescenza; una lente da orologiaio, applicata all'occhio, riesce assai comoda per osservare i particolari più minuti. L'apertura dei canali semicircolari per mezzo delle punte già ricordate, si può fare con notevole esattezza, così da vedere l'uno o l'altro canale membranoso attraverso la breccia della parete ossea. Non va però dimenticato che i canali ossei sono scavati nel tessuto compatto, e

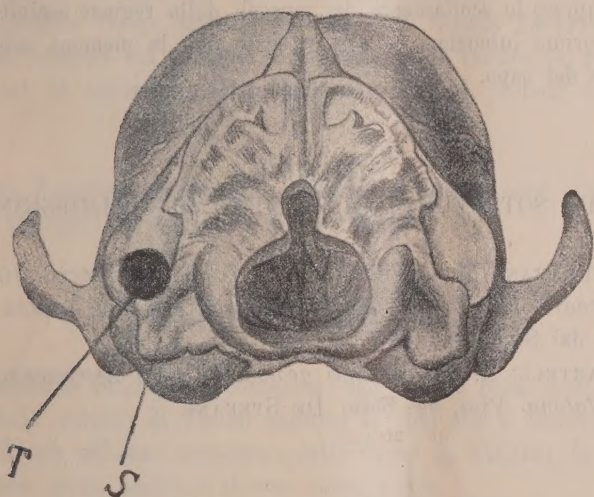


Fig. 3. — Cranio di cane visto posteriormente per mostrare il punto *T* dove va applicata la corona di trapano; *S* = ipofisi giugulare.

che quindi l'*isolamento* di essi è — almeno per mio conto — impossibile; la distruzione dei canali semicircolari riesce invece perfettamente, e si può con ogni sicurezza arrestare l'atto operativo prima di ledere la chiocciola. Quando invece la conservazione della chiocciola non sia necessaria o non sia desiderata, è facilissimo continuare la trapanazione in avanti e in basso, distruggendo così tutto il labirinto. In questo caso conviene essere cauti, sopra tutto in corrispondenza al fondo del meato acustico interno, giacchè la punta del trapano può facilmente sfuggire e penetrare nella cavità cranica. Terminata l'operazione sui canali, si fa una sutura a due piani, uno muscolare ed uno cutaneo, e si lascia l'animale riposare in luogo appartato e tranquillo. È superfluo ricordare che tutta l'operazione va compiuta seguendo le regole asettiche.

Numerose autopsie hanno dimostrato che l'operazione risponde al suo scopo, in quanto permette la distruzione totale o parziale del labirinto senza ledere i centri nervosi.

L'osservazione fisiologica degli animali operati, formerà oggetto di una altra Nota; per ora mi fermerò solamente sopra un punto che riguarda la critica del metodo operatorio. Tutti i cani operati di labirintectomia unilaterale presentano una caratteristica posizione del capo, la quale permane fin che sopravvive l'animale; il capo, cioè, è rotato e flesso verso il lato operato. Mi sorse il dubbio che ciò potesse essere in rapporto, per quanto secondario, con la lesione operatoria portata ai muscoli della nuca. Per accertare questo punto ho provato sopra un cane la prima parte dell'atto operatorio, compreso lo scollamento dei muscoli della regione occipitale; il cane guarì per prima intenzione, e non presentò mai la menoma asimmetria nel portamento del capo.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

1. PARRAVANO M. e SIROVICH G. *I fenomeni di cristallizzazione nei sistemi ternari*. II. *Miscela ternarie isomorfe con una lacuna di miscibilità*. Pres. dal Socio PATERNÒ.

2. MARTELLI A. *Osservazioni geologiche sugli Acrocerauni e sui dintorni di Valona*. Pres. dal Socio DE STEFANI.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

1. BIANCHI, relatore, e VOLTERRA. Sulla Memoria: *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili*, del dott. G. B. EVANS.

2. RIGHI e BATTELLI, relatore. Sulla Memoria: *Contributo allo studio della velocità degli ioni*, del dott. A. BERNINI.

3. NASINI, relatore, e PATERNÒ. Sulla Memoria: *I fenomeni di cristallizzazione nei sistemi ternari*. I. *Miscela ternarie isomorfe con una lacuna di miscibilità*, dei dottori M. PARRAVANO e G. SIROVICH.

Le conclusioni delle Relazioni delle precedenti Commissioni esaminatrici, favorevoli alla pubblicazione delle Memorie, messe partitamente ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte dei Soci stranieri FEDERICO VON RECKLINGHAUSEN, il quale faceva parte dell'Accademia,

per la Patologia, sino dal 20 settembre 1887; e IACOPO ENRICO VAN'T HOFF, mancato ai vivi il 2 marzo 1911, che apparteneva all'Accademia, per la Chimica, sino dal 28 agosto 1901.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci CELORIA, MATTIROLO ed HELMERT; il 5° volume delle Opere matematiche del dott. GOMES TEIXEIRA, pubblicate sotto gli auspici del Governo portoghese; e un volume del prof. DUNER in ricordo del 5° centenario della fondazione della R. Società delle scienze di Upsala.

Il Socio PATERNÒ fa omaggio, a nome dell'autore prof. COLSON, dell'opera: *Contribution à l'histoire de la Chimie*.

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA comunica una lettera colla quale la R. Accademia delle scienze di Torino esprime il voto che il Governo si faccia iniziatore di una edizione economica delle Opere di Galileo; la Classe delibera di dare piena adesione al voto sopra citato.

Lo stesso PRESIDENTE dà inoltre partecipazione degli inviti pervenuti all'Accademia per prender parte alle feste commemorative della Società delle scienze di Cassel e della Università di Breslau.

E. M.
